

Übungsserie 4

1. Sei X eine diskrete ZV mit Werten in $1, 2, 3, \dots$. Die Verteilung von X ist gegeben durch

$$P[X = n] = n^{-s}/\zeta(s) \quad (1)$$

wobei $s > 1$ ein Parameter der Verteilung ist, und $\zeta(s)$ ist die berühmte *Riemann'sche Zeta-Funktion*: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Die Verteilung von X heisst *Euler - Verteilung*.

Für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das Ereignis E_m als

“ X ist durch m ohne Rest teilbar”,

oder auch

“Es gibt ein ganzzahliges $k > 0$, so dass $X = k \cdot m$ ”.

- a) Zeige, dass $P[E_m] = m^{-s}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
- b) Seien p und q zwei unterschiedliche Primzahlen. Zeige: E_p und E_q sind unabhängig. (Hinweis: n ist dann und nur dann durch p und durch q teilbar, wenn n auch durch pq teilbar ist.)
- c) Seien p_1, p_2, \dots, p_k unterschiedliche Primzahlen. Zeige: $E_{p_1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_k}$ sind unabhängig. (Gleicher Hinweis wie oben: n ist durch p_1 und p_2 und \dots und p_k teilbar $\Leftrightarrow n$ ist durch $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ teilbar.)
- d) Betrachte $\bigcap_{p: p \text{ prim}} E_p^c$. Welche Realisation von X liegt in $\bigcap_{p: p \text{ prim}} E_p^c$? Beweise damit die *Euler'sche Formel*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p: p \text{ prim}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad (2)$$

Anmerkungen: Eine Zahl p ist eine Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist. Beispiele: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots

Ausnahme: Wir betrachten 1 *nicht* als Primzahl.

2. SPAMASSASSIN ist ein Spam Filter mit sehr hoher, z.T. mehr als 99%iger Trefferquote. Wir nehmen an, dass SPAMASSASSIN mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.01$ ein eingehendes Werbeemail *nicht* als Spam erkennt.

- i) Morgen werden dir insgesamt 27 Emails mit Spam zugeschickt und mit SPAMASSASSIN geprüft, ob das Email Spam enthält oder nicht.
 - a) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl Emails mit Spam, die nicht als Spam erkannt werden. Welches ist die Verteilung von X , und was ist die erwartete Anzahl nicht erkannter Spam-Emails?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass du morgen maximal 2 Emails mit Spam erhältst?

- ii) Innerhalb eines Jahres werden rund 11000 Emails mit Spam an dich geschickt und alle werden mit SPAMASSASSIN überprüft.
- c) Mit welcher **diskreten** Verteilung würdest du für diesen zweiten Fall, die Verteilung aus i) approximieren? Was ist nun die erwartete Anzahl nicht erkannter Spam-Emails für ein Jahr?
- d) Wie gross ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass du in einem Jahr maximal 2 Emails mit Spam bekommst?

(Quellen: Feb. 2003: D-Itet, D-Infk, Internet und <http://www.spamassassin.org/>)

3. Der Widerstand R einer serienmässig produzierten elektrischen Komponente ist normalverteilt mit $\mu = 1000$ Ohm und $\sigma^2 = 50$ Ohm².
- a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass R zwischen 990 und 1010 Ohm liegt.
 - b) Berechne den Wert c so, dass R mit Wahrscheinlichkeit 90% grösser ist als c .

Abgabe: Bis Mittwoch, den 26. November, 13 Uhr, im Fach der/des entsprechenden Assistentin/Assistenten im HG E18.1 (hinten links, rote Fächer).

Präsenz: Montag: 12-13, LEO C12.1.