Lösungsskizze Übung 4

1. Wir bezeichnen mit X die Anzahl Briefe, die noch am selben Tag ankommen, bei n zufällig ausgewählten Zustelladressen. Die Briefe sind mit Wahrscheinlichkeit p und zwar unabhängig voneinander noch am gleichen Tag zugestellt worden. Wir wählen daher eine Binomialverteilung $X \sim \text{Bin}\,(60, p)$.

a) Die Schätzung für den Anteil der Briefe, die am gleichen tag angekommen sind, ist also

$$\widehat{p} \;=\; h \;=\; \frac{35}{60} \;=\; 0.583$$

b) Das Vertrauensintervall bei Normal-Approximation lautet:

$$h \pm u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} = \frac{35}{60} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{35}{60} \cdot \frac{25}{60}}{60}} = [0.459, 0.708]$$

c) Mit dem Nomogramm bekommt man ca. $[0.45, 0.71]$.

d)
1. Es handelt sich um einen einseitigen Test.
2. Antwort C ist richtig! Begründung: Das VI in b) ist ein **zweiseitiges** Intervall, hier wollen wir aber einseitig testen. Der Wert $p = \frac{2}{3}$ liegt zwar im (zweiseitigen) VI aus b), muss aber nicht im einseitgen VI für den Parameter liegen (da die Intervallgrenzen nicht übereinstimmen, die obere Grenze des zweiseitigen Intervalls liegt weiter oben). Würde hingegen p ausserhalb der oberen Grenze des zweiseitigen VI liegen, dann würde p auch ausserhalb des einseitigen Intervalls liegen. In diesem Fall würde in beiden Fällen H_0 verworfen und man könnte etwas aussagen.

2. **a)** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} = \frac{1}{10}\left(1 + 5 + \cdots + 4\right) = 2.7$

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{9}\left((1-2.7)^2 + (5-2.7)^2 + \cdots + (4-2.7)^2\right) = 2.678$

b) $\bar{x}$ und s^2 sind praktisch identisch. Die Situation ist eine typische Situation einer Poissonverteilung: Es wird das Eintreten seltener Ereignisse (bei rot passierende Fahrzeuge) während einer gewissen Zeitspanne (Tag) gemessen.

c) Wir schätzen die Parameter mit den Momentenschätzer: Bei der Poissonverteilung gilt ja: $\text{Var}\,(X) = \lambda$ und $\mathbf{E}\,[X] = \lambda$. Also hat man die zwei Möglichkeiten $\widehat{\lambda} = \bar{x} = 2.7$ und $\widehat{\lambda} = s^2 = 2.678$.

d) Mit der exakten Methode:
$T = 1 + 5 + \cdots + 4 = 27$, somit nach der Tabelle: $T_u = 17.80$ und $T_o = 39.28$.
Also bekommen wir VI= $\left[\frac{T_u}{n}, \frac{T_o}{n}\right] = \left[1.78, 3.928\right]$
Mit der Normalapproximation:
VI= $\left[\bar{x} - u_\alpha\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}, \bar{x} + u_\alpha\sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}\right] = \left[2.7 - 1.96\sqrt{\frac{2.7}{10}}, 2.7 + 1.96\sqrt{\frac{2.7}{10}}\right] = \left[1.682, 3.718\right]$.

3. a)
- Modellannahme: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots n = 9;$ i. i. d.
- $H_0 : X_i \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2), i = 1, \ldots n = 9;$ mit $\mu_0 = 8, \sigma^2$ unbekannt.
- $H_A : X_i \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma^2), i = 1, \ldots n = 9;$ mit $\mu_A \neq 8, \sigma^2$ wie unter H_0.
- Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} \sim \text{t-verteilt mit } (9-1) \text{ Freiheitsgraden}$$

  wobei s_x die geschätzte Standardabweichung ist.
  Mit den gegeben Werten:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}} = \frac{8.52 - 8}{0.937/\sqrt{9}} = 1.66$$

- Verwerfungsbereich: $K = \{|T| \geq t_{8;0.975} = 2.31\}$

b) Der Wert t der Teststatistik liegt im Annahmebereich von H_0 (Annahmebereich $= K^c = \{|T| < t_{8;0.975} = 2.31\}$, d. h. mit diesen Daten kann (zumindest mit dem t-Test) keine signifikante Abweichung der Verschlusszeit von der Einstellung nachgewiesen werden.

c) Wie der Test unter b) gezeigt hat, ist der Parameter $\mu = 8$ mit den Daten verträglich, d. h. er liegt im Vertrauensintervall für den Erwartungswert μ der Verschlusszeit.

Beachte: Test und Vertrauensintervall sind äquivalent (mit Hilfe vom Test kommt man immer auf den gleichen Schluss wie mit dem Vertrauensintervall). Hier folgt aus der Bedingung für den Annahmebereich

$$\begin{aligned}
|T| &< t_{8;0.975} \\
\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}\right| &< t_{8;0.975} \\
|\bar{x} - \mu_0| &< t_{8;0.975}\,\frac{s_x}{\sqrt{n}} \\
-t_{8;0.975}\frac{s_x}{\sqrt{n}} &< \bar{x} - \mu_0 < t_{8;0.975}\,\frac{s_x}{\sqrt{n}} \\
\bar{x} - t_{8;0.975}\,\frac{s_x}{\sqrt{n}} &< \mu_0 < \bar{x} + t_{8;0.975}\,\frac{s_x}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

die Formel für das Vertrauensintervall für μ und umgekehrt. D.h. $t \in$ Annahmebereich $\Leftrightarrow$ $\mu_0 \in$ Vertrauensintervall.

d) H_0 und H_A: $\sigma = 0.4$ ist nun bekannt.
Teststatistik: Benutzen nun σ anstelle von s_x, somit ist $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8.52-8}{0.4/\sqrt{9}} = 3.9$.
Zudem ist T jetzt standardnormalverteilt.
Verwerfungsbereich: $K = \{|T| \geq q_{0.975} = 1.96\}$. Wir müssen nun das $z_{1-\alpha/2}$-Quantil der Normalverteilung benützen und nicht mehr $t_{1-\alpha/2}$.

$\Rightarrow$ H_0 wird hier deutlich verworfen.

4. Sei d_i die Differenz der Werte beim i-ten Versuchstier ($A - B$):

Tier i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_i	-1	1.5	2	2.5	3	3	3.5	-4	4	5	5.5
Vorzeichen	-	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+
Rang$\|d_i\|$	1	2	3	4	5.5	5.5	7	8.5	8.5	10	11

a) Die Wirkung der beiden Salben wird am selben Versuchsobjekt durchgeführt, es werden also zwei Teilexperimente am selben Objekt durchgeführt.

b) **t-Test:** $d_i \ \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$ i.i.d. mit σ^2 unbekannt.
$H_0 : \ \mu_0 = 0$
$H_A : \ \mu_0 \neq 0$. Wir führen den Test zweiseitg durch, da es uns nur interessiert, ob ein Unterschied besteht.
Das arithmetische Mittel ist $\bar{d} = 2.273$ und die Standardabweichung $\sigma(d_i) = 2.724$.
Damit ist die Teststatistik: $t = \sqrt{11}\frac{\bar{d}-0}{\sigma(d_i)} = 2.7675$. t ist unter H_0 t-verteilt mit $11 - 1$ Freiheitsgraden. Da $|t| > t_\alpha = 2.228$ wird H_0 verworfen.

c) Das Vertrauensintervall für A ist:

$$\bar{x}_A \pm t_\alpha \frac{\sigma_A}{\sqrt{n}} = 30.64 \pm 2.228 \frac{2.899}{\sqrt{11}} = [28.69, 32.59]$$

Analog für B:

$$\bar{x}_B \pm t_\alpha \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}} = 28.36 \pm 2.228 \frac{2.882}{\sqrt{11}} = [26.42, 30.30]$$

d) **Vorzeichentest:** Die Nullhypothese und die Alternative sind:
H_0: $d_i \ \sim \ F_0$ unabhängig, Median $= 0$
H_A: $d_i \ \sim \ F$ unabhängig, Median $\neq 0$
Teststatistik: $U = \#\{i | d_i > 0\}$
Kritischer Bereich: $\{0, 1\} \cup \{10, 11\}$ (zweiseitig)
Wir haben $U = 9$ und damit kann H_0 nicht verworfen werden.
Wilcoxentest: Die Nullhypothese und Alternative sind:
H_0: $d_i \sim F_0$ symmetrisch um 0
H_A: $d_i \sim F$ symmetrisch um $\mu \neq 0$.
Die Rangsumme der negativen Differenzen ist $T_- = 9.5$.
Kritischer Bereich: $K = \{0, \ldots, 10\} \cup \{56, \ldots, 66\}$ (zweiseitig)
Wir haben $T_- = 9.5 \in K$ und damit wird H_0 verworfen.

e) $H_0: \ \mu_0 = 0$
$H_A: \ \mu_0 > 0$. Einseitiger Test, da wir wissen wollen, ob Salbe B besser ist (also weniger Bakterien vorhanden sind).
$t_\alpha = 1.812$
da $t = 2.7675 > 1.812$, wird H_0 noch stärker verworfen (die Teststatistik ändert ja nicht).