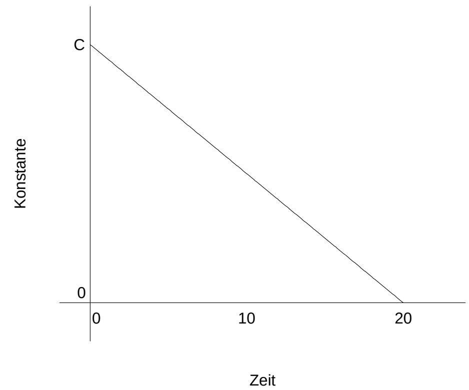
Lösungsskizze Übung 3

1. **a)** Gesucht ist die Dichte der Wartezeit T:



$$
\begin{aligned}
f(t) &= \text{lineare Funktion auf } [0,t] \\
f(t) &= \begin{cases} at+b & 0 \le t \le 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{c}{20}t + c & 0 \le t \le 20 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Als nächstes bestimmen wir die Konstante c. Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$. Also:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt &= \int_0^{20} \left(-\tfrac{c}{20}t + c\right) dt = \left(-\tfrac{c}{40}t^2 + tc\right)\Big|_0^{20} \\
&= c\left(-\tfrac{400}{40} + 20\right) = c \cdot 10 = 1
\end{aligned}
$$

Also bekommen wir: $c = \frac{1}{10}$.
Oder direkte Berechnung von c: Die Fläche unter der Kurve muss gleich 1 sein:

$$c \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10}$$

Als nächstes berechnen wir den Erwartungswert der Wartezeit T:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= \int_0^{20} t\left(-\tfrac{1}{200}\,t + \tfrac{1}{10}\right) dt = \int_0^{20} \left(-\tfrac{1}{200}\,t^2 + \tfrac{1}{10}\,t\right) dt \\
&= \left(-\tfrac{1}{600}\,t^3 + \tfrac{1}{20}\,t^2\right)\Big|_0^{20} = 6\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{Var}(T) = \mathbf{E}[T^2] - \mathbf{E}[T]^2$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[T^2] &= \int_0^{20} t^2\left(-\tfrac{1}{200}t + \tfrac{1}{10}\right) dt = \int_0^{20} \left(-\tfrac{1}{200}t^3 + \tfrac{1}{10}t^2\right) dt \\
&= \left(-\tfrac{1}{800}\,t^4 + \tfrac{1}{30}\,t^3\right)\Big|_0^{20} = 66\tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Also bekommen wir: $\operatorname{Var}(T) = 66\frac{2}{3} - \left(6\frac{2}{3}\right)^2 = 22.22$.

b) Wir haben 10 Baustellen mit den Wartezeiten $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$, wobei T_i, $i = 1, \ldots, 10$, verteilt ist wie T. Der totale mittlere Zeitverlust (=totale mittlere Wartezeit) ist also:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[T_1 + T_2 + \cdots + T_{10}\right] &= \mathbf{E}\left[T_1\right] + \mathbf{E}\left[T_2\right] + \cdots + \mathbf{E}\left[T_{10}\right] \\ &= 10 \cdot 6\tfrac{2}{3} = 66\tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

2. Folgende Verteilungen sind sinnvoll:
$X^{(a)}$: Anzahl Ereignisse in einem Zeitintervall: Poissonverteilung
$X^{(b)}$: Andere stetige Verteilung (die Kindersterblichkeit legt eine Verteilung mit mindestens zwei Maxima nahe.)
$X^{(c)}$: Alle Werte im Rundungsintervall sind gleich wahrscheinlich: Uniforme Verteilung
$X^{(d)}$: Poissonverteilung
$X^{(e)}$: Binomialverteilung
$X^{(f)}$: Lebensdauer = Wartezeit bis Zerfall des Teilchens: Exponentialverteilung
$X^{(g)}$: Stetige glockenförmige Verteilung um einen bestimmten Normwert: Normalverteilung (oder eine andere stetige glockenförmige Verteilung)
$X^{(h)}$: Nadelverlust in % ist beliebig auf dem Intervall $[0, 100]$ verteilt: Andere stetige Verteilung

3. Bezeichne X die Anzahl fauler Melonen bei n zufällig herausgegriffenen Melonen. Die Melonen seien unabhänig voneinander, mit Wahrscheinlichkeit p faul. Daher wählen wir die Binomialverteilung: $X \sim \text{Bin}(80, p)$.

a) Die Schätzung für den Anteil fauler Melonen ist dann:

$$\widehat{p} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = 0.375$$

b) Das Konfidenzintervall ist dann:

$$\widehat{p} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\widehat{\text{Var}}\left(\widehat{p}\right)} = \widehat{p} \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{80}} = 0.375 \pm 0.106 = [0.269, 0.481]$$

c) Aus dem Nomogramm kommt man auf etwa $[0.25, 0.49]$ (Da nur die Linien für $n = 50$ und 100 eingezeichnet sind, muss man von Auge abschätzen, wo die Linie für 80 sein könnte).

4. Sei X das Gewicht einer Tablette mit $\sigma = 10mg$. Wir haben also

$$X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2 = 10^2\right).$$

a) Mit der Standardisierung bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[1995 \leq X \leq 2005\right] &= \mathrm{P}\left[X \leq 2005\right] - \mathrm{P}\left[X \leq 1995\right] \\
&= \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2005-\mu}{\sigma}\right] - \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1995-\mu}{\sigma}\right] \\
&= \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 0.5\right] - \mathrm{P}\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -0.5\right] \\
&= 0.6915 - 0.3085 \\
&= 0.383
\end{aligned}$$

b) $\bar{x}$ ist eine Schätzung für μ. Das 99% Intervall ist somit:

$$\bar{X} \pm z_{0.995} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Das 99.5%-Quantil der Normalverteilung $z_{0.995}$ ist 2.58.
$\Rightarrow 2008 \pm 2.58 \frac{10}{\sqrt{100}} \Rightarrow [2005.4, 2010.6]$

Der Sollwert von $2000mg$ liegt nicht in diesem Intervall.

c) Das Konfidenzintervalls ist:

$$[2008 - z_{0.995} \frac{10}{\sqrt{n}}, 2008 + z_{0.995} \frac{10}{\sqrt{n}}]$$

Also ist die Breite des Intervalls: $2 \cdot z_{0.995} \frac{10}{\sqrt{n}} < 2$. Daraus bestimmen wir nun n:

$$2.58 \cdot 10 < \sqrt{n} \Rightarrow n > 665$$

d) $\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot (1997 + 2004 + 2000 + 2019 + 2000 + 2024 + 1997 + 1999) = 2005.$
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Also $s^2 = \frac{1}{7}\Big((1997-2005)^2 + (2004-2005)^2 + \ldots + (1999-2005)^2\Big) = 10.50^2$
Das 97.5%-Quantil der t-Verteilung mit 7 Freiheitsgraden ist: $t_{7,0.975} = 2.365$ und damit bekommt man:

$$\left[2005 - t_{7,0.975}\frac{10.5}{\sqrt{8}}, 2005 + t_{7,0.975}\frac{10.5}{\sqrt{8}}\right] = \left[1996.22, 2013.78\right]$$