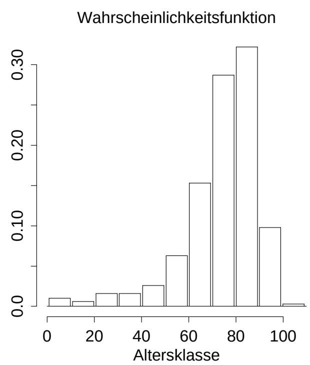
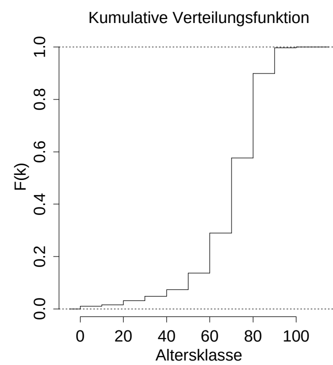
Lösungsskizze Übung 2

1. Mit dem Wort *Alter* bezeichnen wir das Sterbealter einer Person.

a) Fehlende Werte der Tabelle:

a) = 0.006 = 0.016 - 0.010
b) = 0.048 = 0.032 + 0.016
c) = 0.063 = 0.137 - 0.074
d) = 0.899 = 0.997 - 0.098
e) = 0.003 = 1.000 - 0.997





Die kumulative Verteilungsfunktion $F(k) := \mathrm{P}\,[\text{Alter} \leq k]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann vor oder am k-ten Geburtstag stirbt.
$1 - F(k) = 1 - \mathrm{P}\,[\text{Alter} \leq k] = \mathrm{P}\,[\text{Alter} > k]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann nach dem k-ten Geburtstag stirbt, also den k-ten Geburtstag erlebt.

b) Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,[30 < \text{Alter} \leq 60] &= \mathrm{P}\left[\text{Alter} \in]30,60]\right] \\ &= \mathrm{P}\left[\text{Alter} \in]30,40]\right] + \ldots + \mathrm{P}\left[\text{Alter} \in]50,60]\right] \\ &= 0.016 + 0.026 + 0.063 = 0.105 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,[30 < \text{Alter} \leq 60] &= \mathrm{P}\,[\text{Alter} \leq 60] - \mathrm{P}\,[\text{Alter} \leq 30] \\ &= F(60) - F(30) = 0.137 - 0.032 = 0.105 \end{aligned}$$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person über den 80. Geburstag hinaus lebt, ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,[\text{den 80. erleben}] &= \mathrm{P}\,[\text{Alter} > 80] \\ &= \mathrm{P}\left[\text{Alter} \in]80,90]\right] + \ldots + \mathrm{P}\left[\text{Alter} \in]100,110]\right] \\ &= 0.322 + 0.098 + 0.003 = 0.423 \end{aligned}$$

Andere Möglichkeit: $\mathrm{P}\,[\text{den 80. erleben}] = 1 - \mathrm{P}\,[\text{Alter} \leq 80] = 1 - 0.577 = 0.423$

2. Wir setzten folgende Abkürzungen: b := belegt, f := frei. Zudem kennen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P\left[1.\text{b und } 2.\text{b}\right] &= 0.5 \\ P\left[1.\text{b und } 2.\text{f}\right] &= 0.3 \\ P\left[1.\text{f und } 2.\text{b}\right] &= 0.1 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P\left[1.\text{f und } 2.\text{f}\right] &= 1 - \Big(P\left[1.\text{b und } 2.\text{b}\right] + P\left[1.\text{f und } 2.\text{b}\right] + P\left[1.\text{b und } 2.\text{f}\right] \Big) \\ &= 1 - \Big(0.5 + 0.1 + 0.3 \Big) \\ &= 1 - 0.9 \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P\left[2.\text{f}\right] &= 1 - P\left[2.\text{b}\right] \\ &= 1 - \Big(P\left[1.\text{f und } 2.\text{b}\right] + P\left[1.\text{b und } 2.\text{b}\right] \Big) \\ &= 1 - \Big(0.1 + 0.5 \Big) \\ &= 1 - 0.6 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

c) Gesucht: P [mindestens 1 Saal frei]:

$$\begin{aligned} P\left[\text{mindestens 1 Saal frei}\right] &= 1 - P\left[1.\text{b und } 2.\text{b}\right] \\ &= 1 - 0.5 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} P\left[\text{mindestens 1 Saal frei}\right] &= P\left[1.\text{f und } 2.\text{f}\right] + P\left[1.\text{f und } 2.\text{b}\right] + P\left[1.\text{b und } 2.\text{f}\right] \\ &= 0.1 + 0.1 + 0.3 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass x gegen y gewinnt, bezeichen wir mit p_{xy}. Wir wissen: $p_{cb} = 0.4 \Rightarrow p_{bc} = 0.6$, $p_{ca} = 0.55 \Rightarrow p_{ac} = 0.45$ und $p_{ab} = 0.35 \Rightarrow p_{ba} = 0.65$. Wir nehmen ausserdem an, dass alle Spiele unabhängig voneinander sind.

a)

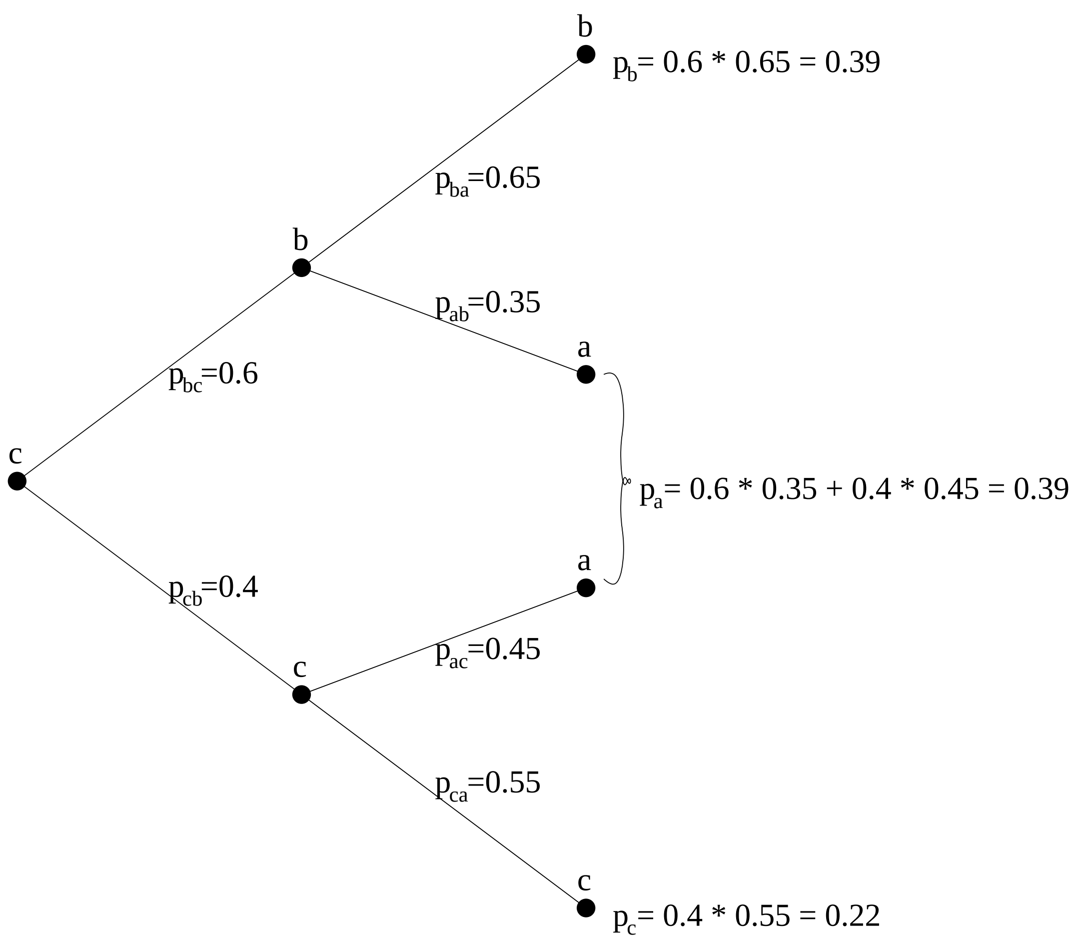
$$\begin{aligned} p_a &= p_{ab}p_{ac} = (1-p_{ba})(1-p_{ca}) = 0.35 \cdot 0.45 = 0.158 \\ p_b &= p_{bc}p_{ba} = (1-p_{cb})(1-p_{ab}) = 0.6 \cdot 0.65 = 0.39 \\ p_c &= p_{ca}p_{cb} = (1-p_{ac})(1-p_{bc}) = 0.55 \cdot 0.4 = 0.22 \end{aligned}$$

Mit 23.2% wird es also zu einem Unentschieden kommen.

b)

$$\begin{aligned} p_a &= p_{cb}(1-p_{ca}) + (1-p_{cb})p_{ab} = 0.39 \\ p_b &= p_{bc}p_{ba} = 0.39 \\ p_c &= p_{cb}p_{ca} = 0.22 \end{aligned}$$

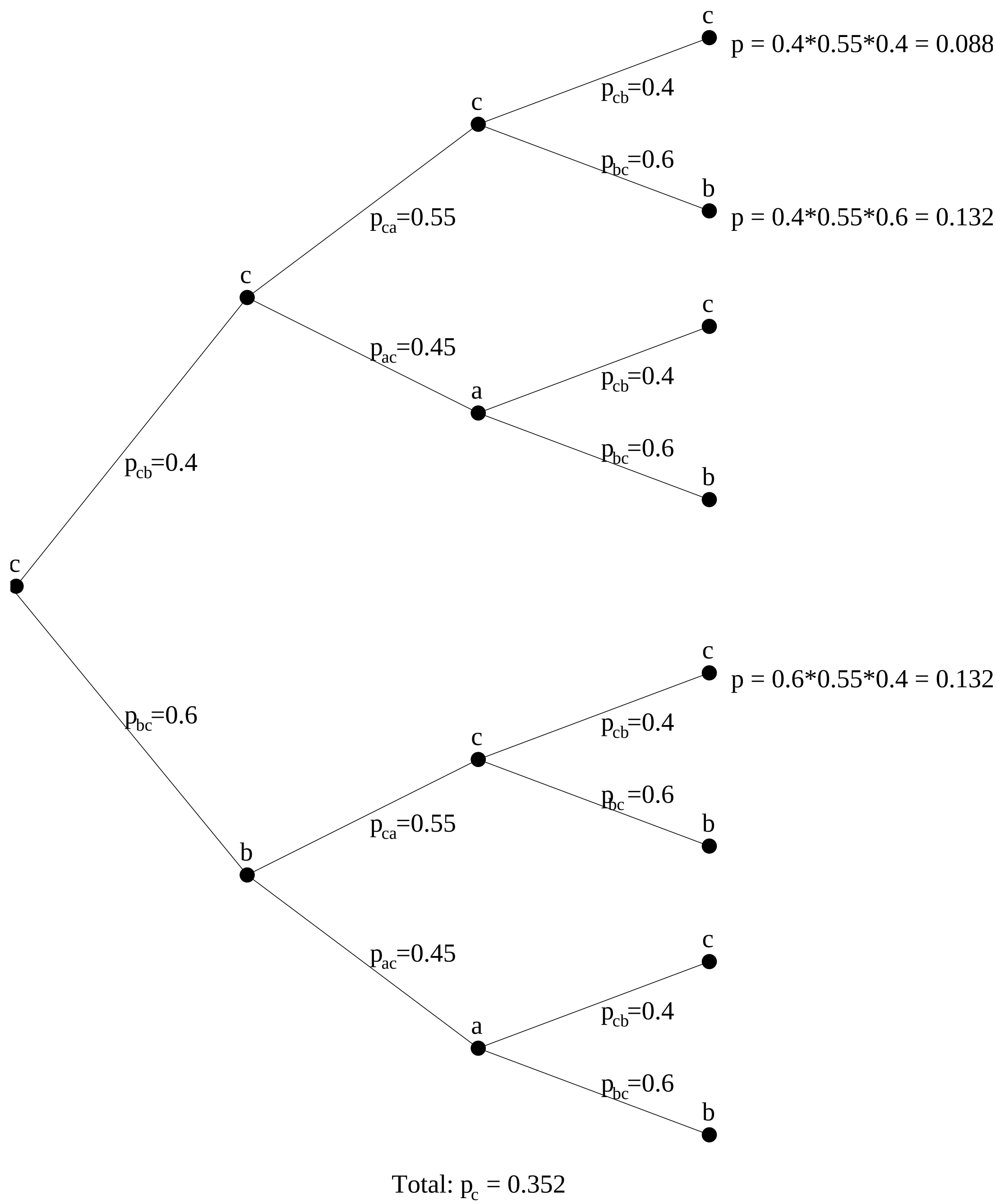
Oder mit einem Baum:



c) Die Gewinnchancen, falls sie zuerst gegen Barbara spielt, sind:

$$\begin{aligned} p_1 &= P[\text{“1. und 2. oder 2. und 3. gewinnt”}] \\ &= P[\text{“1. und 2.”}] + P[\text{“2. und 3.”}] - P[\text{“1. 2. und 3. gewinnt}] \\ &= 2(1-p_{bc})p_{ca} - (1-p_{bc})^2 p_{ca} = 0.352 \end{aligned}$$

Oder mit einem Baum:

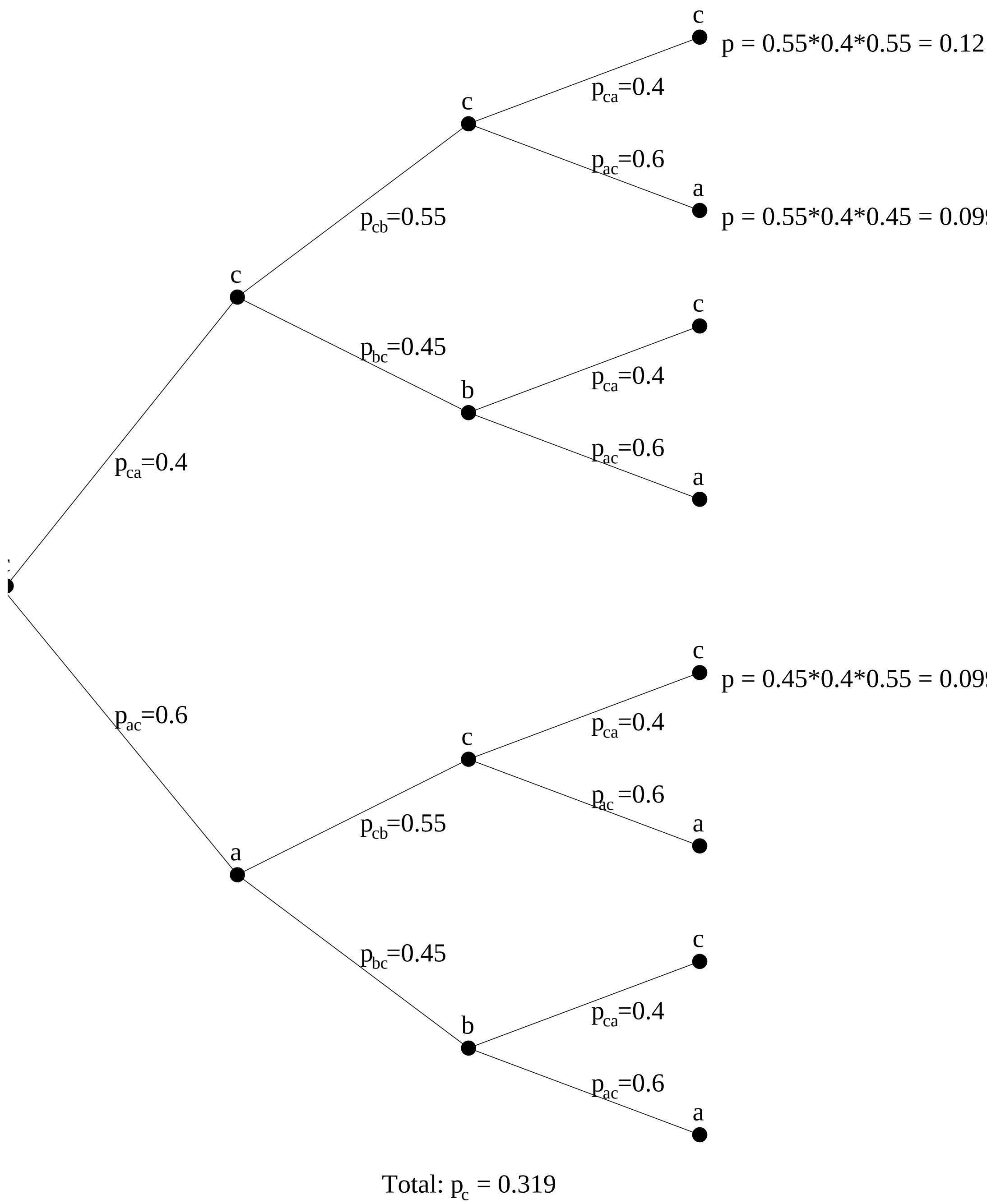


Analog, falls sie zuerst gegen Anna spielt:

$$p_2 = P[\text{“1. und 2. oder 2. und 3. gewinnt”}]$$

$$= \quad 2(1-p_{bc})p_{ca} - (1-p_{bc})p_{ca}^2 = 0.319$$

Das Gleiche mit einem Baum:



Sie sollte also zuerst gegen Barbara spielen.

4. a) Es handelt sich hier um eine stetige Zufallsvariable, also muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; 1$$

Da die Dichte nur im Intervall $[-2, 4]$ grösser Null ist gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-2}^{4} f(x)\,dx &&= \int_{-2}^{4} c\,\tfrac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= c\int_{-2}^{4} \tfrac{1}{x^2+1}\,dx &&= c\,[\arctan(x)]_{-2}^{4} \;=\; 1\end{aligned}$$

Also bekommen wir für c:

$$c \;=\; \tfrac{1}{\arctan(4)-\arctan(-2)} \;=\; 0.41$$

b) Die Verteilungsfunktion für eine stetige Zufallsvariable ist: $F(x) = P[X \le x]$ mit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Also folgt: Für $a < -2$ gilt $F(a) = 0$, für $-2 \le a < 4$

$$\begin{aligned}P[X\;\le\;a] \;=\; F(a) &= \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \;=\; \int_{-2}^{a} c\,\tfrac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= c\,[\arctan(a) - \arctan(-2)] \;=\; 0.41\;[\arctan(a) + 1.11]\end{aligned}$$

und für $a > 4$ gilt $F(a) = 1$.

c)

$$\begin{aligned}P[1 \le X \le 2] &= P[X \le 2] - P[X \le 1] \;=\; F(2)\;-\;F(1) \\ &= 0.41\,[\arctan(2) + 1.11]\;-\;0.41\,[\arctan(1) + 1.11] \\ &= 0.13\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \;=\; \int_{-2}^{4} x\,\tfrac{c}{x^2+1}\,dx \\ &= c\,\left[\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)|_{-2}^{4}\right] \;=\; \tfrac{c}{2}\,[\log(17) - \log(5)] \;=\; 0.25\end{aligned}$$

Die Formel für die Varianz ist:

$$V(X) \;=\; E[(X\;-\;E[X])^2] \;=\; E[X^2]\;-\;E[X]^2$$

Um die Varianz zu berechnen, benützen wir die zweite Formel. Dazu müssen wir zuerst noch $E[X^2]$ berechnen:

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx \;=\; \int_{-2}^{4} x^2\,f(x)\,dx \;=\; \int_{-2}^{4} c\,x^2\,\tfrac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= c\int_{-2}^{4} \tfrac{x^2}{x^2+1}\,dx \;=\; c\int_{-2}^{4}\left(1 - \tfrac{1}{x^2+1}\right)\,dx \;=\; c\,[x - \arctan(x)]_{-2}^{4} \\ &= c\,[4 - \arctan(4) - (-2 - \arctan(-2))] \\ &= 1.47\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$V(X) \quad=\quad 1.47 - (0.25)^2 \quad=\quad 1.41$$

e)

$$\begin{aligned}V(2X) &= 2^2\,V(X) &&= 4\cdot 1.41 &&= 5.64 \\ V(X+Y) &= V(X)+V(Y) &&= 2\cdot 1.41 &&= 2.82 \\ V(\tfrac{1}{2}(X+Y)) &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2(V(X)+V(Y)) &&= \tfrac{1}{4}\cdot 2\cdot 1.41 &&= 0.705\end{aligned}$$