Der abstrakte bedingte Erwartungswert

Hansruedi Künsch
Seminar für Statistik
ETH Zürich

März 2006

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Teil-σ-Algebra $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, die wir als die momentan vorhandene Information interpretieren. Die bedingte Erwartung $E(X \mid \mathcal{F}_0)$ einer Zufallsvariablen $X \geq 0$ gegeben $\mathcal{F}_0$ ist die beste Prognose von X gestützt auf diese Information. Definiert wird diese durch die beiden Eigenschaften

1. $E(X \mid \mathcal{F}_0)$ ist eine $\mathcal{F}_0$-messbare nichtnegative Zufallsvariable.
2. Für alle Mengen $A \in \mathcal{F}_0$ gilt

$$E(1_A E(X \mid \mathcal{F}_0)) = E(1_A X). \tag{1}$$

Mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym wird gezeigt, dass $E(X \mid \mathcal{F}_0)$ existiert und P-f.s. eindeutig ist. Falls X positive und negative Werte annimmt, dann zerlegt man X in Positiv- und Negativteil, $X = X^+ - X^-$, und setzt

$$E(X \mid \mathcal{F}_0) = E(X^+ \mid \mathcal{F}_0) - E(X^- \mid \mathcal{F}_0)$$

sofern die rechte Seite sinnvoll ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $X \in L_1$.

Wenn X $\mathcal{F}_0$-messbar ist, dann ist natürlich $E(X \mid \mathcal{F}_0) = X$. Wenn hingegen X unabhängig ist von $\mathcal{F}_0$, dann ist $E(1_A X) = E(1_A)E(X)$, und damit folgt $E(X \mid \mathcal{F}_0) = E(X)$. Die interessanten Fälle liegen natürlich zwischen diesen beiden Extremen.

Aus (1) folgt insbesondere der Satz von der iterierten Erwartung

$$E(E(X \mid \mathcal{F}_0)) = E(X)$$

und (durch masstheoretische Induktion)

$$E(Y E(X \mid \mathcal{F}_0)) = E(YX)$$

für beliebige nichtnegative, $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariablen Y. Die letzte Gleichung lässt sich auch lesen als

$$E((X - E(X \mid \mathcal{F}_0))Y) = 0.$$

Wenn X in L_2 ist, dann bedeutet dies, dass $X - E(X \mid \mathcal{F}_0)$ senkrecht steht auf allen $\mathcal{F}_0$-messbaren L_2-Funktionen. Dann ist also $E(X \mid \mathcal{F}_0)$ die orthogonale Projektion von X auf diesen Unterraum, d.h. die beste Approximation von X.

Die folgenden zwei Beispiele geben eine explizite Konstruktion der bedingten Erwartung in einfachen Fällen:

Beispiel: Diskrete σ-Algebren. Sei $\mathcal{F}_0$ die σ-Algebra erzeugt von einer disjunkten Zerlegung $(A_1, A_2, \ldots)$ von Ω. Das bedeutet

$$\Omega = \cup_i A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j),$$

und $\mathcal{F}_0$ besteht aus allen Vereinigungen von Mengen A_i. Dann prüft man leicht nach, dass gilt

$$E(X \mid \mathcal{F}_0)(\omega) = \sum_{i;P(A_i)>0} \frac{E(1_{A_i}X)}{P(A_i)} 1_{A_i}(\omega).$$

Beispiel: Der absolut-stetige Fall. Seien X, Y zwei Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte $f(x, y)$ (bezüglich des Lebesgue-Masses) und sei $\mathcal{F}_0$ die von Y erzeugte σ-Algebra (d.h. $\mathcal{F}_0$ besteht aus den Mengen $\{\omega | Y(\omega) \in B\}$, B eine beliebige Borel-Menge). Dann prüft man leicht nach, dass für eine beliebige positive messbare Funktion h gilt

$$E(h(X, Y) \mid \mathcal{F}_0)(\omega) = \begin{cases} \frac{\int h(x,Y(\omega)) f(x,Y(\omega)) dx}{\int f(x,Y(\omega)) dx} & \text{falls } \int f(x, Y(\omega)) dx > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der definierenden Eigenschaft (1) folgt leicht, dass die bedingte Erwartung die gleichen Eigenschaften hat wie die gewöhnliche Erwartung:

$$\begin{aligned}
E(c_1 X_1 + c_2 X_2 \mid \mathcal{F}_0) &= c_1 E(X_1 \mid \mathcal{F}_0) + c_2 E(X_2 \mid \mathcal{F}_0) \ (P - f.s.), \\
X_1 \leq X_2 \ (P - f.s.) &\Rightarrow E(X \mid \mathcal{F}_0) \leq E(X \mid \mathcal{F}_0) \ (P - f.s.), \\
0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \ (P - f.s.) &\Rightarrow E(\lim_n X_n \mid \mathcal{F}_0) = \lim_n E(X_n \mid \mathcal{F}_0) \ (P - f.s.), \\
\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} &\Rightarrow E(E(X \mid \mathcal{F}_1) \mid \mathcal{F}_0) = E(X \mid \mathcal{F}_0) \ (P - f.s.). \\
E(g(X) \mid \mathcal{F}_0) &\geq g(E(X \mid \mathcal{F}_0)) \ (P - f.s.) \text{ falls } g \text{ konvex.}
\end{aligned}$$

Die folgenden beiden Konvergenzresultate benutzen den Konvergenzsatz für Martingale. Für eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_\infty$ die σ-Algebra erzeugt von $\cup_n \mathcal{F}_n$. Dann gilt für beliebiges $X \in L_1$

$$\lim_n E(X \mid \mathcal{F}_n) = E(X \mid \mathcal{F}_\infty) \ (P - f.s. \text{ und in } L_1).$$

Dies gilt ebenfalls für eine absteigende Folge von σ-Algebren $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots$ mit $\mathcal{F}_\infty = \cap_n \mathcal{F}_n$.