Die Martingaltransformierte & Kovariationsprozesse Stochastischer Integrale

Marco Frei

15. Mai 2006

1 Lebesgue-Stieltjes-Integral, Stochastische Integrale

Satz 1.1 (Lebesgue-Stieltjes-Mass)**.** *Für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsstetig existiert ein eindeutiges Mass μ_F auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, so dass $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ für alle endlichen Intervalle $(a,b] \subset \mathbb{R}$. Das Mass μ_F heisst das zu F assoziierte Lebesgue-Stieltjes-Mass.*

Beweis. Durch die Vorschrift $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ wird ein σ-endliches Prämass auf der durch die halboffenen Intervalle erzeugten Algebra definiert. μ_F lässt sich nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory-Hahn eindeutig erweitern auf die Borel'sche σ-Algebra. □

Definition 1.2 (Lebesgue-Stieltjes-Integral)**.** *Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, rechtsstetig definieren wir*

$$\int_a^b g \; dF := \int_{[a,b]} g \; d\mu_F$$

(vorausgesetzt, dass $g \geq 0$ oder $g \in L^1(\mu_F)$). Die Funktion F heisst Lebesgue-Stieltjes-Integrator.

Im Falle eines C^1-Integrators F lässt sich das L-S-Integral leicht berechnen:

Satz 1.3. *Angenommen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend und stetig differenzierbar. Dann ist μ_F absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Masses λ und die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_F}{d\lambda}$ ist gleich der Ableitung von F. In Formeln:*

$$\int_a^b g \; dF = \int_a^b g \cdot F' \; d\lambda$$

Beweis. Wir benutzen masstheoretische Induktion. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt: $\int_a^b dF = \int_a^b F' \, d\lambda$. Die Vorschrift $B \mapsto \int_a^b I_B \cdot F' \, d\lambda$ definiert ein Mass auf den Borelmengen, welches auf allen Intervallen mit μ_F übereinstimmt.

Aus der Eindeutigkeit des L-S-Masses folgt daher: $\int_a^b I_B \; dF = \int_a^b I_B \cdot F' \; d\lambda$ für alle Borelmengen $B \subset \mathbb{R}$. Ein Borel-messbares g zerlegt man nun in positiven und negativen Teil, wählt jeweils eine isotone Approximationsfolge simpler Funktionen und wendet monotone Konvergenz an. □

Das Lebesgue-Stieltjes-Integral lässt sich erweitern auf nicht monotone Integratoren F. Dazu benötigen wir den Begriff der Variation.

Definition 1.4. *Die Variation $V_F((a,b])$ einer Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem endlichen Intervall $(a,b]$ ist definiert als*

$$V_F((a,b]) := \sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{N(\mathcal{P})} |F(t_{k+1}) - F(t_k)|,$$

wobei wir das Supremum über alle Partitionen von $(a,b]$ nehmen. F heisst von endlicher (oder beschränkter) Variation, falls $V_F((a,b]) < \infty$ für alle endlichen Intervalle $(a,b] \subset \mathbb{R}$.

Die Klasse der Funktionen von endlicher Variation umfasst offenbar die monotonen Funktionen (denn es ist $V_F((a,b]) = |F(b) - F(a+)|$). Es gilt sogar:

Satz 1.5. *Eine rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von endlicher Variation lässt sich bis auf eine additive Konstante in eindeutiger Weise als Differenz zweier rechtsstetiger, monoton wachsender Funktionen schreiben: $F = f_1 - f_2$.*

f_1 kann man so definieren: Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ fix und man setzt

$$f_1(t) := \begin{cases} V_F((\xi,t]) & \text{falls } t > \xi \\ 0 & \text{falls } t = \xi \\ -V_F((t,\xi]) & \text{falls } t < \xi \end{cases}$$

Definition 1.6. *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und von endlicher Variation mit Zerlegung $F = f_1 - f_2$ gemäss Proposition 1.5. Fernerhin sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Das Lebesgue-Stieltjes-Integral von g bezüglich F ist dann definiert als*

$$\int_a^b g \; dF := \int_{[a,b]} g \; d\mu_{f_1} - \int_{[a,b]} g \; d\mu_{f_2}$$

(vorausgesetzt, dass $g \in L^1(\mu_{f_1}) \cap L^1(\mu_{f_2})$).

Man benutzt die Notation $\int_a^b g \; |dF| = \int_a^b g \; df_1 + \int_a^b g \; df_2$.

Nun können wir Stochastische Integrale definieren. Es seien H und M stochastische Prozesse auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Es seien die Pfade von H Borel-messbar und die Pfade von M rechtsstetig und von endlicher Variation. Man definiert punktweise $\forall \omega \in \Omega$ und $\forall t \geq 0$:

$$(H \cdot M)_t(\omega) := \int_0^t H(s,\omega) \; dM(s,\omega)$$

Der Prozess M ist in unserem Kontext oftmals ein Martingal $N-A$, wobei N ein Zählprozess ist und A der zugehörige (previsible und monotone) Kompensator.

2 Die Martingaltransformierte $\int HdM$

Viele zensurierte Datenstatistiken sind von der Form $\sum_i \int H_i dM_i$, wobei $M_i = N_i - A_i$ ein (lokales) Martingal ist. Als Beispiel sei hier auf die sogenannte Logrank-Statistik verwiesen (siehe FH: Example 0.2.2).
Unter gewissen Voraussetzungen ist der Prozess $(H \cdot M)$ selbst ein Martingal:

Theorem 2.1. *Es sei N ein Zählprozess mit $EN(t) < \infty$ für alle t.*
Es sei $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ eine rechtsstetige Filtration, so dass gilt::

- *$M = N - A$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal, wobei A ein monoton wachsender $\mathbb{F}$-previsibler Prozess ist mit $A(0) = 0$.*
- *H ist ein beschränkter, $\mathbb{F}$-previsibler Prozess.*

Dann ist der Prozess L definiert durch

$$L(t) = \int_0^t H(u)\ dM(u)$$

ein $\mathbb{F}$-Martingal.

Beweis. Skizze: Die Aussage lässt sich direkt nachprüfen, falls H ein elementarer previsibler Prozess ist (d.h. ein Indikator auf einem previsiblen Rechteck $(a, b] \times A$ mit $A \in \mathcal{F}_a$ oder $[0] \times A$ mit $A \in \mathcal{F}_0$). Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{H}$ den Vektorraum der beschränkten, messbaren und adaptierten Prozesse H, so dass $(H \cdot M)$ ein Martingal ist. $\mathcal{H}$ enthält die konstanten und die elementaren previsiblen Prozesse. Ist H^n eine Folge in $\mathcal{H}$, und ist $H \equiv \sup H^n$ beschränkt, dann ist auch $H \in \mathcal{H}$ (cf. Satz von Beppo Levi). Mit dem Monotonie-Lemma ("monotone class theorem") folgt nun, dass $\mathcal{H}$ alle beschränkten, previsiblen Prozesse umfasst. $\square$

Bemerkung. Theorem 2.1 gilt ceteris paribus auch für die Lokalisierungen, d.h. unter den schwächeren Bedingungen $EN(t) \leq \infty$ und H lokal beschränkt ist $(H \cdot M)$ ein lokales Martingal. Ist fernerhin M lokal in L^2 beschränkt, so gilt dies auch für $(H \cdot M)$.

3 Previsible Kovariationsprozesse Stochastischer Integrale

Der previsible Kovariationsprozess zweier stochastischer Integrale lässt sich als stochastisches Integral darstellen:

Theorem 3.1. *Es seien H_1 und H_2 beschränkte, previsible Prozesse; N_1 und N_2 beschränkte Zählprozesse. Es sei $M_i = N_i - A_i$ die übliche Doob-Zerlegung mit $A_i(0) = 0$. Wir nehmen an, dass $E(M_i^2(t)) < \infty$ für alle t.*
Dann ist $\int H_1 dM_1 \int H_2 dM_2 - \int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle$ ein Martingal und somit:

$$\left\langle \int H_1 dM_1, \int H_2 dM_2 \right\rangle = \int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle.$$

Für die Lokalisierungen hat man: Ist H_i previsibel und lokal beschränkt und N_i ein beliebiger Zählprozess, dann ist $\int H_1 dM_1 \int H_2 dM_2 - \int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle$ ein lokales Martingal.

Beweis. Siehe FH, p.67 ff. □

Theorem 3.2. *Es seien H_1 und H_2 previsibel und lokal beschränkt; N_1 und N_2 beliebige Zählprozesse mit Doob-Zerlegung $M_i = N_i - A_i$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $E(\int_0^t H_i^2 d\langle M_i, M_i\rangle) < \infty$ für ein $t > 0$ gilt:*

- *$\int H_i dM_i$ ist ein Martingal auf $[0, t]$*
- *$E(\int_0^t H_i dM_i) = 0$*
- *$E(\int_0^t H_i dM_i \cdot \int_0^t H_j dM_j) = E(\int_0^t H_i H_j d\langle M_i, M_j\rangle)$*

Beweis. Skizze: $\int H_i dM_i$ ist ein lokales Martingal nach Theorem 2.1. Man zeigt leicht, dass für jede Lokalisierungsfolge $\{\tau_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ die gestoppten Prozesse $X_n := \int_0^{s\wedge\tau_n^i} H_i dM_i$ auf $[0, t]$ in L^2 beschränkt sind; die Famile $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist daher gleichmässig integrierbar. Daraus lässt sich zeigen, dass $\int H_i dM_i$ auf $[0, t]$ ein Martingal ist. Die zweite Aussage folgt aus der Konstanz der Erwartungswerte für Martingale, die dritte Aussage folgt im wesentlichen aus Theorem 3.1. □

Bemerkung. Die Identität $E(\int H_1 dM_1 \cdot \int H_2 dM_2) = E(\int H_1 H_2 d\langle M_1, M_2\rangle)$ nennt man auch die Itô-Isometrie.

Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(\int_0^t H_i dM_i, \int_0^t H_j dM_j\right) &= E\left(\int_0^t H_i dM_i \cdot \int_0^t H_j dM_j\right) \\ &= E\left(\int_0^t H_i H_j d\langle M_i, M_j\rangle\right) \end{aligned}$$

Letztere Identität ist nützlich, falls die Kovariationsprozesse $\langle M_i, M_j\rangle$ bekannt sind. Falls die Zählprozesse N_1 und N_2 unterschiedliche Sprungzeiten haben und die Kompensatoren A_i *stetig* sind, so gilt:

$$\langle M_i, M_j\rangle = I_{\{i=j\}} A_i$$

Für Kompensatoren mit Unstetigkeitsstellen gilt allgemeiner:

$$\langle M_i, M_i\rangle = \int (1 - \Delta A_i) dA_i$$

und

$$\langle M_i, M_j \rangle = -\int \Delta A_i dA_j,$$

wobei ΔA_i die Sprunghöhe bei Unstetigkeit bezeichnet. Diese Formeln können wir auffassen als formale Präzisierung der heuristischen Beziehung

$$d\langle M, M \rangle(s) = \mathrm{Var}(dM(s)|\mathcal{F}_{s-}) = dA(s)(1 - dA(s))$$

Beispiel. Wir betrachten die Statistik $U(t) = \int_0^t H(s)d(N(s) - A(s))$, wobei H ein beschränkter, previsibler Prozess ist und $A(t) = \int_0^t I_{\{X \geq s\}}\lambda(s)ds$. Wir nehmen an, $M := N - A$ sei ein quadrat-integrables Martingal. Wir berechnen die Varianz von U:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\, U(t) &= E(U^2(t)) \\
&= E\left(\left(\int_0^t H(s)d(N(s) - A(s))\right)^2\right) \\
&= E\left(\int_0^t H(s)^2 d\langle M(s), M(s)\rangle\right) \\
&= E\left(\int_0^t H(s)^2 dA(s)\right) \\
&= E\left(\int_0^t H(s)^2 I_{\{X \geq s\}}\lambda(s)ds\right) \\
&= \int_0^t E(H(s)^2 I_{\{X \geq s\}})\lambda(s)ds
\end{aligned}$$