Anwendungen von Doob-Meyer

Daniel Werner

15. Mai 2006

1 Einführung des Ko-/Variationsprozesses

Ausgehend von einem rechts-stetigen nicht negativen Submartingal X erhalten wir mit der Doob-Meyer Zerlegung ein Martingal $M = X - A$. Wegen der Ungleichung von Jensen ist M^2 ebenfalls ein Submartingal und der Kompensator von M^2 wird speziell benannt:

Korollar 1.1 (Previsible quadratische Variation von M)**.** *Sei M ein rechts-stetiges Martingal zur rechts-stetigen Filtration $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ und nehme an, es gelte $E[M^2(t)] < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann existiert genau ein wachsender rechts-stetiger previsibler Prozess $\langle M, M\rangle$, so dass $\langle M, M\rangle(0) = 0$ f.s., $E[\langle M, M\rangle(t)] < \infty$ für jedes t, und $\{M^2(t) - \langle M, M\rangle(t) : t \geq 0\}$ ist ein rechts-stetiges Martingal.*

Betrachte nun das infinitesimale Intervall $(t-h, t]$ und definiere $dM(t) := M(t) - M(t-h)$. Dann gilt für den previsiblen Variationsprozess von M wegen der Martingaleigenschaft von M und $M^2 - \langle M, M\rangle$:

$$d\langle M, M\rangle(t) = E[dM^2(t)|\mathcal{F}_{t-}] = E[\{dM(t)\}^2|\mathcal{F}_{t-}] = \mathrm{Var}\{dM(t)|\mathcal{F}_{t-}\}$$

Mit ähnlichen Argumenten kann der previsible Kovariationsprozess $\langle M_1, M_2\rangle$ von zwei Martingalen M_1 und M_2 definiert werden:

$$d\langle M_1, M_2\rangle(t) = \mathrm{Cov}\{dM_1(t), dM_2(t)|\mathcal{F}_{t-}\}$$

Das nächste Theorem beweist die Existenz des Prozesses:

Theorem 1.2 (Previsibler Kovariationsprozess)**.** *Seien M_1 und M_2 zwei rechts-stetige Martingale zu $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}, P)$ und nehme an, es gelte $E[{M_i}^2(t)] < \infty$ für $t \geq 0$ und $i = 1, 2$. Dann existiert ein rechts-stetiger previsibler Prozess $\langle M_1, M_2\rangle$ mit $\langle M_1, M_2\rangle(0) = 0$, $E[\langle M_1, M_2\rangle(t)] < \infty$, so dass*

1. *$\langle M_1, M_2\rangle$ die Differenz von zwei wachsenden rechts-stetigen previsiblen Prozessen ist, und*

2. *$M_1 M_2 - \langle M_1, M_2\rangle$ ein Martingal ist.*

Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass $\langle M_1, M_2\rangle$ Pfade von beschränkter Variation hat, worauf im zweiten Teil noch genauer eingegangen wird. Bemerke zudem, dass der previsible Kovariationsprozess $\langle M_1, M_2\rangle$ eindeutig ist.

Weil $M_1 M_2 - \langle M_1, M_2 \rangle$ ein Martingal ist für $0 \leq s \leq t$:

$$E[M_1(t)M_2(t) - M_1(s)M_2(s)|\mathcal{F}_s] = E[\langle M_1, M_2\rangle(t) - \langle M_1, M_2\rangle(s)|\mathcal{F}_s]$$

Setze nun $s = 0$ und nehme den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E[\langle M_1, M_2\rangle(t)] =& E[M_1(t)M_2(t) - M_1(0)M_2(0)] \\ =& \{E[M_1(t)M_2(t)] - E[M_1(t)]E[M_2(t)]\} - \\ & \{E[M_1(0)M_2(0)] - E[M_1(0)]E[M_2(0)]\} \end{aligned}$$

Falls nun $M_1(0)$ und $M_2(0)$ unkorroliert sind (sehr oft sind sie Null), dann ist $E[\langle M_1, M_2\rangle(t)]$ die Kovarianz von $M_1(t)$ und $M_2(t)$.

Korollar 1.3 (Orthogonale Martingale)**.** *Seien M_1 und M_2 zwei rechts-stetige $\mathcal{F}_t$-Martingale mit E[${M_i}^2(t)$] $< \infty$ für t ≥ 0. Dann ist der rechts-stetige Prozess $M_1 M_2$ genau dann ein Martingal, wenn $\langle M_1, M_2\rangle \equiv 0$. In diesem Fall werden M_1 und M_2 ortogonal genannt.*

Orthogonale Martingale sind unkorroliert, falls $M_1(0)$ und $M_2(0)$ unkorroliert sind.

2 Lokale quadratisch integrierbare Martingale

Der previsible Variations- und Kovariationsprozess für Martingale mit endlichen zweiten Momenten kann ausgedehnt werden auf lokale quadratisch integrierbare Martingale. Zuerst der previsible Variationsprozess ⟨M, M⟩ im lokalen Fall:

Theorem 2.1 (Lokaler Fall)**.** *Sei M ein rechts-stetiges lokales quadratisch integrierbares Martingal auf [0, ∞). Dann existiert genau ein wachsender rechts-stetiger previsibler Prozess ⟨M, M⟩ mit ⟨M, M⟩(0) = 0 f.s. und ⟨M, M⟩(t) $< \infty$ f.s für jedes t ≥ 0, so dass M^2-⟨M, M⟩ ein rechts-stetiges lokales Martingal ist. Wenn (τ_n) eine Lokalisierungsfolge für M ist, dann gilt:*

$$\langle M, M\rangle(t) = \lim_{n\to\infty} \langle M(.\wedge\tau_n), M(.\wedge\tau_n)\rangle(t)$$

Die nächsten zwei Korollare erhalten die Resultate der zweiten Momente für die lokalen quadratisch integrierbaren Martingale.

Korollar 2.2. *Sei M ein rechts-stetiges lokales quadratisch integrierbares Martingal auf [0, ∞) mit M(0) = 0 f.s. Dann gilt:*

$$E[M^2(t)] \leq \lim_{n\to\infty} E[M^2(t\wedge\tau_n)] = E[\langle M, M\rangle(t)]$$

Korollar 2.3. *Wenn das lokale quadratisch integrierbare Martingal M ein Martingal ist mit M(0) = 0 f.s., dann gilt für alle t ≥ 0:*

$$E[M^2(t)] = E[\langle M, M\rangle(t)]$$

Zum Schluss noch die Existenz des previsiblen Kovariationsprozesses für zwei lokale quadratisch integrierbare Martingale.

Theorem 2.4. *Seien M_1 und M_2 zwei rechts-stetige lokale quadratisch integrierbare Martingale auf [0, ∞). Dann existiert genau ein rechts-stetiger previsibler Prozess $\langle M_1, M_2\rangle$ mit $\langle M_1, M_2\rangle$(0) = 0 f.s. und $\langle M_1, M_2\rangle$(t) $< \infty$ f.s. für jedes t, und so dass $M_1 M_2$ - $\langle M_1, M_2\rangle$ ein rechts-stetiges lokales Martingal auf [0, ∞) ist. Insbesondere,*

$$\langle M_1, M_2\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle M_1 + M_2, M_1 + M_2\rangle - \langle M_1, M_1\rangle - \langle M_2, M_2\rangle\right\}$$

Bemerkung: Wenn die zugehörige Filtration vollständig und rechts-stetig ist, dann ist $\langle M_1, M_2\rangle$ eindeutig.

3 Stetige Kompensatoren

Wie wir im letzten Vortrag gesehen haben, lässt sich jeder beliebige Zählprozess N als Summe eines lokalen Martingals M und eines wachsenden rechts-stetigen previsiblen Prozesses A darstellen: $N = M + A$. Für den Kompensator A gilt dann unter folgenden Voraussetzungen:

Theorem 3.1. *Sei N ein Zählprozess auf [0, ∞) mit E[N(t)] $< \infty$ für alle $t \geq 0$ und A bezeichne sein Kompensator. Nehme an, dass fast alle Pfade von A stetig sind und dass E[M^2(t)] $< \infty$ für alle t, wobei $M = N - A$. Dann ist $\langle M, M\rangle = A$ und $M^2 - A$ ist ein rechts-stetiges Martingal.*

Falls A stetig ist und beschränkten Erwartungswert hat, gilt folgendes Theorem:

Theorem 3.2. *Sei N ein Zählprozess und A sein Kompensator. Falls A stetig ist, dann gilt: E[M^2(t) $\leq$ E[A(t)], $t \geq 0$. Falls zudem E[A(t)] $< \infty$ (oder äquivalent falls E[N(t)] $< \infty$) für jedes t, dann gilt: E[M^2(t)] = E[A(t)], $t \geq 0$, und $M^2 - A$ ist ein Martingal.*