Schriftliche Prüfung
(2 Stunden)

Bemerkungen:

- Alle schriftlichen Hilfsmittel und ein Taschenrechner sind erlaubt.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet! Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.
- Wenn nicht anders vermerkt, sind die Tests auf dem 5%-Niveau durchzuführen.
- Der Lösungsweg muss immer ersichtlich sein (ausser bei Multiple-Choice-Aufgaben).
- Bei den Multiple-Choice-Aufgaben ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple-Choice-Aufgaben mit Kreuzchen in das zugehörige Antwortblatt ein.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.

Viel Erfolg!

1. (11 Punkte) Um den Stresspegel der Studenten im Basisjahr zu ermitteln, hat die ETH-Schulleitung eine Studie in Auftrag gegeben. Hierzu wurde die Adrenalinmenge (in Nanogramm pro Milliliter Blut) von 42 zufällig ausgewählten Studenten untersucht. Wir verwenden folgende Zufallsvariablen:

X : Adrenalinmenge (ng/ml) eines Studenten, der regelmässig Sport treibt,

Y : Adrenalinmenge (ng/ml) eines Studenten, der keinen Sport treibt.

Die Schulleitung vermutet, dass regelmässiger Sport sich positiv auf den Stresspegel auswirkt, d.h. zu einem geringeren Adrenalinwert führt. 26 der 42 Studenten treiben regelmässig Sport. Für diese wurde ein Stichprobenmittel von $\bar{x} = 2.59$ Nanogramm Adrenalin pro Milliliter und eine Standardabweichung von $s_X = 0.45$ ermittelt. Die restlichen 16 Studenten treiben keinen Sport. Bei diesen Studenten wurde ein Stichprobenmittel von $\bar{y} = 3.25$ Adrenalin und eine Standardabweichung von $s_Y = 0.52$ ermittelt. Nehmen Sie an, dass die Adrenalinmenge im Blut normalverteilt und unabhängig von Person zu Person ist.

a) Für welchen Parameter ist $\bar{X}$ ein geeigneter Schätzer?

b) Bestimmen Sie jeweils ein exaktes 1-seitiges 95% Vertrauensintervall (mit Formel) für die durchschnittliche Adrenalinmenge in den beiden Gruppen. **Tipp:** Beachten Sie hierbei die Hypothese der Schulleitung und wählen Sie eine geeignete Richtung für das jeweilige Vertrauensintervall.

c) Wie beurteilen Sie die Vermutung der Schulleitung aufgrund der berechneten Vertrauensintervalle?

Die Schulleitung ist nicht restlos überzeugt und möchte, dass Sie zur Sicherheit noch einen geeigneten Hypothesentest durchführen. Nehmen Sie dazu an, dass die Varianz für beide Gruppen gleich ist.

d) Es handelt sich um einen ungepaarten Test. Warum?

e) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an und begründen Sie kurz Ihre Wahl.

f) Führen Sie den geeigneten t-Test auf dem 5% Niveau durch: Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik T, die Verteilung der Teststatistik T unter der Nullhypothese, den Verwerfungsbereich für T und den Testentscheid.

2. (11 Punkte) Jonas hat neulich in der Zeitung gelesen, dass in der Schweiz die Wahlbeteiligung bei eidgenössischen Abstimmungen bei durchschnittlich 45% liegt. Jonas nimmt also an, dass jeder Schweizer an der letzten Abstimmung unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von $\pi = 0.45$ teilgenommen hat.
Betrachten Sie nun zuerst 10 zufällig ausgewählte Schweizer. Sei $X \in \{0, 1, ..., 10\}$ die Anzahl davon, die an der letzten Abstimmung teilgenommen haben.

a) Wie ist X verteilt? Geben Sie die Verteilungsfamilie und die Parameter an.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 der befragten Personen abgestimmt haben?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 8 befragten Personen abgestimmt haben (von der 9. und 10. befragten Person weiss man nicht, ob sie abgestimmt haben)?

Jonas, der selbst an jeder Abstimmung teilnimmt, ist überzeugt, dass innerhalb seines Freundeskreises die Wahlbeteiligung wesentlich höher ist als der Schweizer Durchschnitt. Dies möchte er anhand eines statistischen Tests überprüfen. Dazu fragt er 10 seiner Freunde, ob sie an der letzten Abstimmung teilgenommen haben. Als Antwort erfährt er, dass 7 von seinen 10 befragten Freunden abgestimmt haben.

d) Was sind die Null- und die Alternativhypothese?

e) Führen Sie einen geeigneten exakten Test auf dem 1%-Signifikanzniveau durch. Geben Sie den Verwerfungsbereich und den Testentscheid an.

Jonas bemerkt, dass die statistische Aussagekraft seines Tests nicht besonders gross ist, wenn er nur 10 Freunde befragt. Deshalb befragt er nun auch noch seine Schweizer Arbeitskollegen und Arbeitskolleginnen. Von den 232 befragten Personen haben 126 abgestimmt.

f) Führen Sie erneut einen statistischen Test - diesmal auf dem 5%-Niveau - durch, um die Hypothese von Jonas zu testen. Benutzen Sie dazu eine geeignete Approximation. Geben Sie die Teststatistik, die Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese, den Verwerfungsbereich und den Testentscheid an.

g) Berechnen Sie mithilfe der Approximation aus f) das kleinste Signifikanzniveau α, bei welchem der Test die Nullhypothese gerade noch verwirft. Wie heisst dieser Wert?

3. (11 Punkte) Oma Gerda hat in ihrem Garten 40 verschiedene Blumenzwiebeln vergraben. In der nachfolgenden Tabelle ist aufgelistet, wie viele Zwiebeln sie von welcher Blumenart vergraben hat.

Zwiebelart	Schneeglöckchen	Krokus	Tulpe	Osterglocke
Anzahl der Zwiebeln	16	2	3	19
P[Keimen]	0.9	0.85	0.9	?

In der zweiten Zeile der Tabelle ist die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass eine Zwiebel im Frühling keimt und sich aus ihr eine Blume entwickelt. Das Keimverhalten der einzelnen Zwiebeln kann als unabhängig von einander angenommen werden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Frühling genau 15 Schneeglöckchen in Oma Gerdas Garten blühen?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Krokus und mindestens eine Tulpe blühen?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Oma Gerda im Beet, in dem sie die Zwiebeln der Schneeglöckchen und Tulpen vergraben hat, genau 14 Blumen zählt?

d) Oma Gerda möchte die Wahrscheinlichkeit für das Blühen der Osterglocken schätzen. Im Vorjahr hat sie 21 Osterglockenzwiebeln gesetzt und davon keimten 17. Was wäre ein geeigneter Schätzer? Berechnen Sie den Schätzer.

e) Was ist die erwartete Anzahl blühender Blumen in Oma Gerdas Garten? Mit welcher Varianz?
(*Falls Sie Aufgabe d) nicht lösen konnten, verwenden Sie für die Osterglocken P[Keimen] = 0.85.*)

f) Oma Gerda hat die Blumenzwiebeln bei der Gärtnerei Zwiebeli gekauft. In der Gärtnerei werden 1000 Tulpenzwiebeln gesetzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 880 und 900 Zwiebeln keimen? Benutzen Sie eine geeignete Normalapproximation.

4. (8 Punkte) In einem Fahrsimulator wird die Auswirkung von Alkoholkonsum auf die Reaktionszeit eines Autofahrers erforscht. Dazu wird bei 35 stark betrunkenen Probanden jeweils die Blutalkoholkonzentration (`BAK`) in Promille und die Reaktionszeit (`RZ`) in Sekunden gemessen. Mit den beobachteten Werten wird folgendes Modell gefittet:

$$\texttt{RZ}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \texttt{BAK}_i + E_i, \qquad E_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
lm(formula = RZ ~ BAK)

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.311       ???     0.48    0.635
BAK            1.142      0.443    2.58     ???
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.743 on ?? degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.168,       Adjusted R-squared:  0.142
F-statistic: 6.64 on 1 and ?? DF,  p-value: 0.0146
```

1) Mit wievielen Freiheitsgraden wurde der residual standard error berechnet?
   a) 33
   b) 34
   c) 35
   d) 37

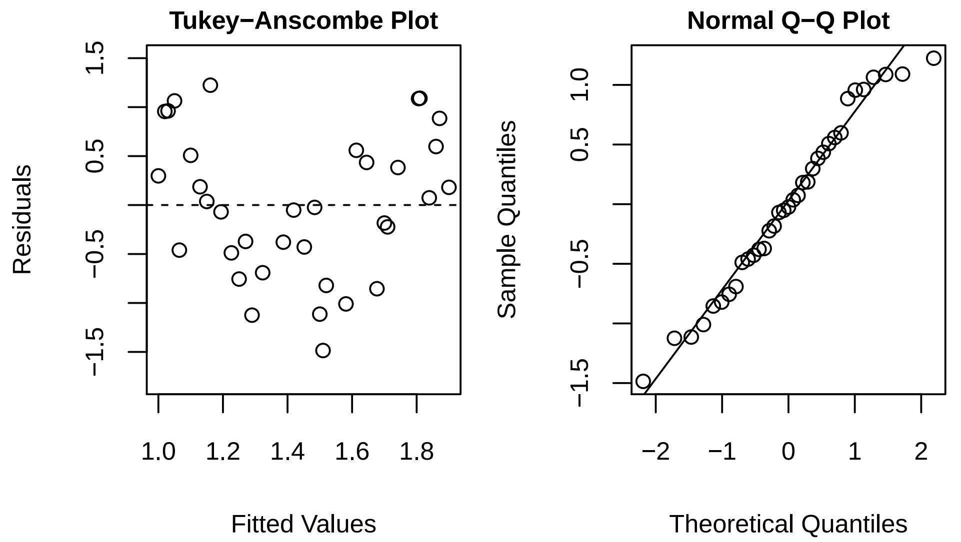
2) Gibt es in diesem Modell auf dem 1%-Niveau mindestens eine signifikante erklärende Variable?
   a) Ja
   b) Nein
   c) Dies kann aus den obigen Angaben nicht entschieden werden.

3) Wie gross ist der Standardfehler für $\hat{\beta}_0$?
   a) 0.648
   b) 0.149
   c) 1.543
   d) 0.443

4) Berechnen Sie das exakte zweiseitige 95%-Konfidenzintervall für β_1.
   a) $[0.240, 2.044]$
   b) $[0.392, 1.892]$
   c) $[-0.069, 2.353]$
   d) $[0.256, 2.028]$

5) Betrachten Sie die nachfolgenden Plots. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

a) Alle Modellannahmen sind erfüllt.
b) Die Fehlervarianz ist konstant, aber die Normalverteilungsannahme trifft nicht zu.
c) Sowohl konstante Fehlervarianz als auch Normalverteilungsannahme treffen nicht zu.
d) Es scheint in diesem Modell systematische Fehler zu geben.



6) Wie würde sich $\hat{\beta}_1$ verändern, falls zusätzlich bei einem nüchternen Probanden (Blutalkoholkonzentration = 0 Promille) eine Reaktionszeit von 1 Sekunde gemessen wurde?

a) $\hat{\beta}_1$ wird grösser
b) $\hat{\beta}_1$ bleibt gleich gross
c) $\hat{\beta}_1$ wird kleiner
d) Dies kann man nicht entscheiden, ohne die Regressionskoeffizienten erneut zu berechnen.

7) Was kann man über den P-Wert für die Variable `BAK` aussagen?

a) P-Wert > 0.2
b) $0.05 <$ P-Wert ≤ 0.2
c) $0.01 <$ P-Wert ≤ 0.05
d) P-Wert ≤ 0.01
e) Man kann nichts über den P-Wert aussagen.

8) Bei welchem der folgenden Regressionsmodelle handelt es sich **nicht** um ein lineares Modell?

a) $\log(Y_i) = \beta_1 X_i + E_i$
b) $Y_i = \log(\beta_1) X_i + E_i$
c) $Y_i = \beta_1 \log(X_i) + E_i$
d) $\log(Y_i) = \beta_1 \log(X_i) + E_i$
e) Keines der obigen Modelle ist linear.

5. (10 Punkte) Die folgenden Aufgaben sind zufällig angeordnet und insbesondere nicht nach Schwierigkeitsgrad sortiert.

1) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt mit $\mu = 3$ und $\sigma^2 = 5$. Wie ist $Y = 2X$ verteilt?
   a) $\mathcal{N}(3, 5)$
   b) $\mathcal{N}(2 \cdot 3, 2 \cdot 5)$
   c) $\mathcal{N}(2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5)$
   d) $\mathcal{N}(2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5)$
   e) dies kann mit obigen Angaben nicht entschieden werden

2) Eine Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.1 & -1 \le x < 0 \\ 0.3 & 0 \le x < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

   Dann beträgt $P(X \le 2)$
   a) 0
   b) 0.1
   c) 0.4
   d) 0.7
   e) f_X ist keine Dichtefunktion, deshalb kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit nicht berechnet werden.

3) Sei X, Y und Z Zufallsvariablen mit $Y = 3X + 2$ und $Z = 2X - 3$. Dann gilt
   a) $\text{Corr}(X, Y) > \text{Corr}(X, Z)$
   b) $\text{Corr}(X, Y) = \text{Corr}(X, Z)$
   c) $\text{Corr}(X, Y) < \text{Corr}(X, Z)$
   d) Die Korrelationen $\text{Corr}(X, Y)$ und $\text{Corr}(X, Z)$ können aus diesen Angaben nicht bestimmt werden.

4) Sie testen die Wirkung eines Medikaments und teilen die 62 Probanden der Studie in 2 Gruppen auf. 22 Personen verabreichen Sie den Wirkstoff (W), den restlichen 40 Personen ein Placebo (P). Sie testen die Nullhypothese $H_0 : \mu_W = \mu_P$ (der Wirkstoff hat keinen Effekt) gegen die einseitige Alternative $H_A : \mu_W > \mu_P$ (der Wirkstoff hat einen positiven Effekt). Zur Auswertung der Ergebnisse führen Sie einen ungepaarten 2-Stichproben t-Test durch und erhalten für die Teststatistik

$$T = \frac{\overline{W}_n - \overline{P}_m}{s_{\text{pool}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

   den realisierten Wert $t = 2$. Welches ist das kleinste Signifikanzniveau, bei dem der Test die Nullhypothese gerade noch verwirft?
   a) 0.01
   b) 0.025
   c) 0.05
   d) 0.075
   e) 0.1

5) Nehmen Sie an, die Ereignisse A und B seien unabhängig, und $A \cap B$ ist disjunkt von einem dritten Ereignis C. Dann gilt

   a) $P(A \cap B \cap C) = 0$
   b) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
   c) $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)$
   d) $P(A \cap B \cap C) = P(C)$
   e) $P(A \cap B \cap C) = 1$

6) Ruben wohnt an einer stark befahrenen Strasse und ärgert sich über die vielen Autos. Deshalb möchte er ein statistisches Modell erstellen für die Anzahl Autos pro Minute, die an seinem Schlafzimmerfenster vorbeifahren. Welche Verteilung wäre dazu am besten geeignet?

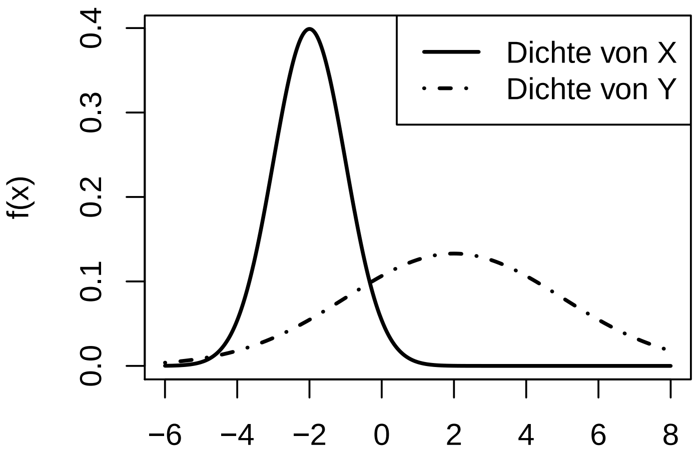
   a) Uniformverteilung
   b) Exponentialverteilung
   c) Bernoulliverteilung
   d) Poissonverteilung
   e) Binomialverteilung

7) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 1$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}(2X + 3Y - 5)$.

   a) 2
   b) 7
   c) 12
   d) 17
   e) 22

8) Im nachfolgenden Plot sind die Dichten von $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ eingezeichnet. Es gilt:

   a) $\mu_X > \mu_Y$, $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$
   b) $\mu_X > \mu_Y$, $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$
   c) $\mu_X < \mu_Y$, $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2$
   d) $\mu_X < \mu_Y$, $\sigma_X^2 < \sigma_Y^2$



9) Der Schüler Patric musste während eines Schuljahres n Prüfungen ($n > 2$) schreiben. In der Hälfte der Prüfungen hat er die Note 6 erreicht, für die andere Hälfte der Prüfungen hat er nichts gelernt und folglich die Note 1 erhalten. Sein Lehrer hat Mitleid und lässt ihn aus den folgenden vier Strategien wählen, um seine Zeugnisnote zu berechnen. Welche Strategie sollte Patric wählen, wenn er eine möglichst gute Gesamtnote erreichen möchte (beste Note: 6, schlechteste Note: 1)?

   a) Strategie 1: Die Zeugnisnote ergibt sich aus dem Median der Noten während des Schuljahres.
   b) Strategie 2: Die Zeugnisnote ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Noten während des Schuljahres.
   c) Strategie 3: Die schlechteste Note wird gestrichen. Die Zeugnisnote ergibt sich aus dem Median der übrigen Noten während des Schuljahres.
   d) Strategie 4: Die schlechteste Note wird gestrichen. Die Zeugnisnote ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der übrigen Noten während des Schuljahres.

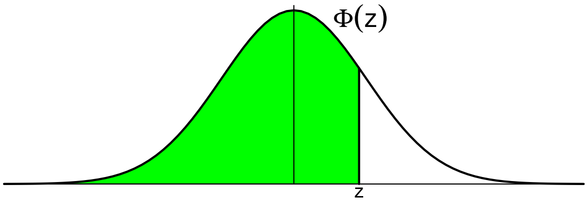
10) Die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^k & x \geq x_{\min} \\ 0 & x < x_{\min} \end{cases},$$

wobei $x_{\min} > 0$ und $k > 0$ zwei Konstanten sind. Bestimmen Sie den Median m von X in Abhängigkeit von $x_{\min}$ und k.

   a) $m = 1 - (2\,x_{\min})^k$
   b) $m = 2\,x_{\min}$
   c) $m = 2\,(x_{\min})^k$
   d) $m = \sqrt[k]{2}\,x_{\min}$
   e) $m = \sqrt[k]{2}\,(x_{\min})^k$

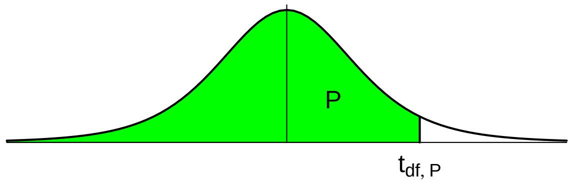
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}[Z \leq z]\,,\; Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576