

Bachelorprüfung: Mathematik 4 - Statistik (2 Stunden)

Bemerkungen:

- Es sind alle schriftlichen Hilfsmittel und der Taschenrechner erlaubt.
- Natels sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Bei den Aufgaben 1 und 2 muss der Lösungsweg ersichtlich sein, sonst gibt es keine Punkte.
- Aufgaben 4 und 5 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice-Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple-Choice-Aufgaben mit Kreuzchen in das separate Antwortblatt ein.
- Rechnen Sie immer mit den exakten Zwischenresultaten weiter. Runden sie alle auf dem Papier angegebenen Endergebnisse sinnvoll.

Viel Erfolg!

1. (8 Punkte)

Ein grosser Autohersteller hat einen elektronischen Fahrspurassistenten entwickelt. Vor dem serienmässigen Einbau möchte er nun einige Tests durchführen. Deshalb hat er fünf Testfahrer eingeladen, die eine vorgegebene Strecke je einmal mit eingeschaltetem und einmal mit ausgeschaltetem Fahrspurassistenten zurücklegen. Ein Kamerasystem misst dabei zu jeder Zeit die Abweichung von der markierten Spur. Schliesslich werden die maximalen Abweichungen jeder Testfahrt notiert. Die Ergebnisse sind (in mm):

Fahrer	1	2	3	4	5
Max. Abw. mit Assistent	103	67	67	360	109
Max. Abw. ohne Assistent	340	270	86	4	106
Differenz	-237	-203	-19	356	3

Es gilt Differenz:= Max. Abw. mit Assistent - Max. Abw. ohne Assistent. Wir nehmen an, dass die Differenzen unabhängig normalverteilt mit Parameter μ und σ^2 sind.

- a) Geben Sie einen vernünftige Schätzer für σ^2 an (als Formel)!

Der Autohersteller will nun aus den Daten schätzen, ob sich die maximale Abweichung mit dem Einbau des Fahrspurassistenten verringert oder nicht. Mit anderen Worten, ob die Differenz kleiner als Null ist oder nicht.

- b) Handelt es sich hier um einen gepaarten oder einen ungepaarten Test? Begründen Sie!
- c) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an.
- d) Führen Sie einen t -Test auf dem 5%-Niveau durch. Was ist der Testentscheid?
- e) Geben Sie ein einseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ an.
- f) Nehmen wir nun an, wir hätten als Schätzwert $\hat{\sigma} = 63.31$ bei gleicher Summe der Differenzen. Wie lautet dann der Testentscheid? Begründen Sie auch kurz heuristisch!

2. (8 Punkte)

Bei der Einnahme einer Malariaphylaxe treten in 0.1% der Fälle starke Nebenwirkungen wie Schwindel, Ohnmacht oder Atemnot auf. Die Stadtregierung von Moshi (Tanzania) hat dennoch beschlossen, wegen einer grassierenden Malariaepidemie allen 1000 Grundschulern die Malariaphylaxe kostenlos zu verabreichen.

- a) Welcher (ungenäherten) Verteilung entspricht die Anzahl der Kinder bei denen starke Nebenwirkungen auftreten?
- b) Warum kann die Verteilung durch eine Poisson(λ)-Verteilung approximiert werden? Geben sie λ an!
- c) Geben Sie folgende Werte jeweils ohne Approximation und mit der Poisson-Approximation an: Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens zwei Kindern starke Nebenwirkungen auftreten. Wahrscheinlichkeit, dass bei genau einem Kind starke Nebenwirkungen auftreten.
- d) Der Sohn eines Schweizer Ex-Botschafters geht in Moshi zur Schule. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei ihm starke Nebenwirkungen auftreten?

3. (10 Punkte)

Das Gastroberatungsunternehmen Lecker und Co. kreiert eine neue Speisekarte für ein Schnellrestaurant. Lecker und Co. nimmt auf Grund langjähriger Erfahrung an, dass etwa (unabhängig von der Anzahl der Kunden) 80% der Kunden des Schnellrestaurants die neue Speisekarte bevorzugen werden.

- a) Am Einführungstag speisen 356 Kunden im Restaurant. Wie gross ist unter obiger Annahme der Erwartungswert für die Anzahl der Kunden, welche die neue Speisekarte bevorzugen?

Lecker und Co. führt bei den 356 Kunden eine kurze Befragung durch. 261 Kunden geben dabei an, dass sie die neue Karte bevorzugen. Der Rest findet die alte Karte mindestens genauso gut wie die neue Karte.

- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit unter der Annahme von Lecker und Co., dass keiner der ersten vier befragten Kunde die neue Karte bevorzugt, der fünfte Kunde jedoch die neue Karte bevorzugt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei der ersten vier befragten Kunden die neue Karte bevorzugen?
- c) Wie gross ist unter der Annahme von Lecker und Co. die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 261 Kunden die neue Karte bevorzugen? Benutzen Sie die Normalapproximation.
- d) Lecker und Co. hat nun starke Zweifel, dass wirklich 80% der Kunden die neue Karte bevorzugen. Lecker und Co. will deshalb die Annahme mit Hilfe der Befragung kritisch überprüfen. Führen Sie den entsprechenden (zweiseitigen) Test durch. Verwenden Sie die Normalapproximation.
- e) Lecker und Co. stellt nach einiger Zeit fest, dass die Befragung unsauber durchgeführt wurde. Nehmen wir also an, dass eine neue Befragung durchgeführt wird, wieder mit 356 Kunden. Nun sei x die Anzahl der Kunden, die die neue Karte bevorzugen. Für welche x wird die Nullhypothese in der Normalapproximation beibehalten?

4. (8 Punkte)

Der Siedepunkt von Wasser (BoilingPoint [°F]) wurde unter variierendem Luftdruck (Pressure [inHg]) gemessen. Es liegen insgesamt 16 Messungen vor.

Folgendes lineare Modell wurde angepasst:

$$\text{Pressure}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{BoilingPoint}_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, 16.$$

Der Regressionsoutput sieht wie folgt aus (gewisse Informationen wurden entfernt):

Call:

```
lm(formula = Pressure ~ BoilingPoint)
```

Residuals:

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.21493 -0.09546 -0.01500  0.09048  0.27793
```

Coefficients:

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -80.667294   1.419984    ???     ??? ***
BoilingPoint  0.520738   0.006997   74.42  <2e-16 ???
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Residual standard error: 0.1608 on ?? degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9975, Adjusted R-squared: 0.9973

F-statistic: 5538 on 1 and ?? DF, p-value: < 2.2e-16

1) Wieviele Freiheitsgrade hat der “Residual standard error”?

- a) 14
- b) 15
- c) 16
- d) 17
- e) 18
- f) 5538

2) Wie gross ist die Schätzung von σ^2 ?

- a) 0.1608
- b) 0.0259
- c) 0.9975
- d) 0.9973
- e) 0.0069
- f) Keine Aussage möglich

3) Wie gross ist der t-Wert der Schätzung von β_0 ?

- a) -80.67
- b) 0.52
- c) 1.42
- d) -114.55
- e) -56.81
- f) 74.42

4) Welches der folgenden Intervalle ist ein exaktes zweiseitiges 95% Vertrauensintervall für β_0 ?

- a) $-80.667 \pm 2.145 \cdot \frac{1.420}{\sqrt{14}}$
- b) $-80.667 \pm 1.960 \cdot \frac{1.420}{\sqrt{14}}$
- c) $-80.667 \pm 2.145 \cdot 1.420$
- d) $-80.667 \pm 1.960 \cdot 1.420$

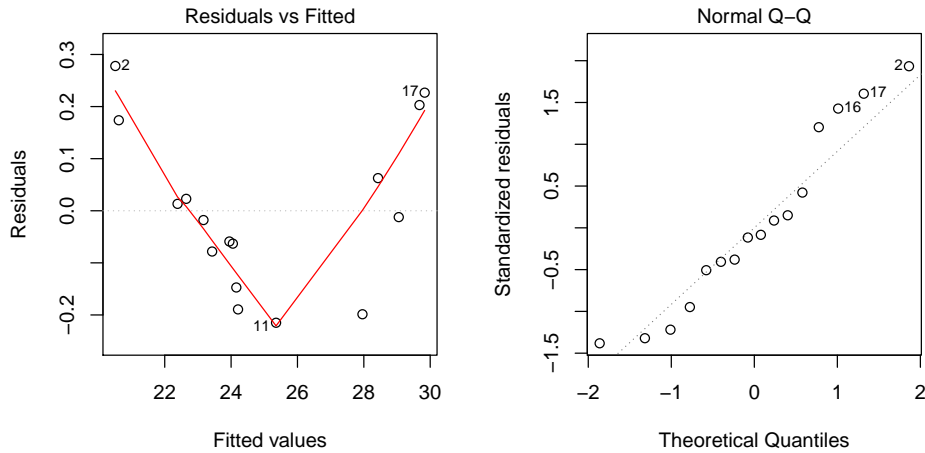
5) Enthält das zweiseitige 99% Vertrauensintervall für β_1 den Wert 0?

- a) Ja
- b) Nein
- c) Keine Aussage möglich

6) Wird die Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = 0$ auf dem 1%-Niveau verworfen?

- a) Ja
- b) Nein
- c) Keine Aussage möglich

- 7) In einem Experiment siedet Wasser bei 200°F. Welchen Luftdruck erwarten Sie gemäss obigem Modell?
- a) 23.48 inHg b) 22.26 inHg c) Keine Aussage möglich
- 8) Betrachten Sie die Plots. Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend?



- a) Die Modellannahmen über die Fehler sind erfüllt.
- b) Die Modellannahmen über die Fehler scheinen plausibel. Es gibt aber Ausreisser.
- c) Die Annahme der konstanten Varianz scheint grob verletzt zu sein, aber die Normalitätsannahme der Fehler ist plausibel.
- d) Es gibt systematische Fehler im Modell.

5. (8 Punkte)

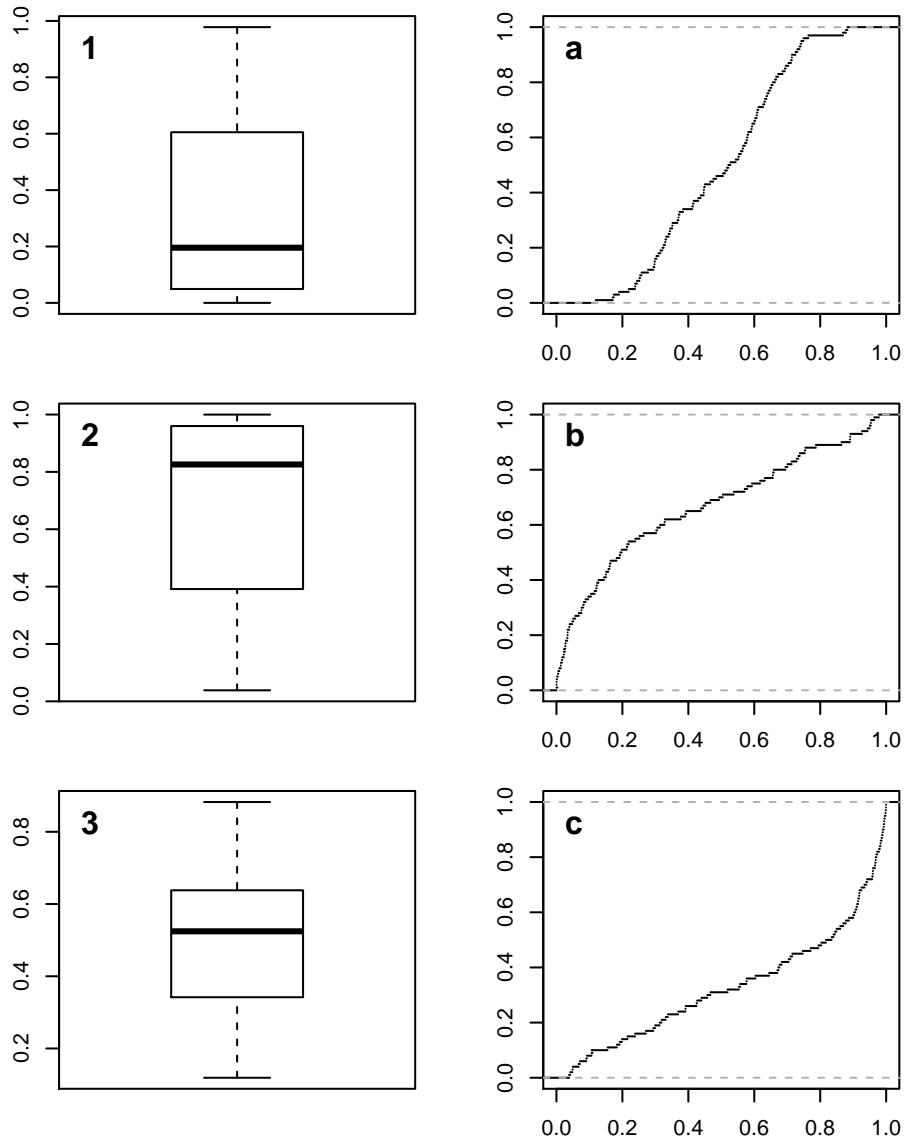
- 1) X und Y seien unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Poisson}(3)$ und $\text{Var}(Y) = 1$.
Was ist $\text{Var}(1 + 2X - Y)$?
- a) 5 b) 6 c) 11
d) 12 e) 13 f) Keine Aussage möglich
- 2) Es sei $X \sim \text{Binomial}(10, 0.5)$. Was ist die Verteilung von $\frac{1}{10}X$?
- a) Binomial(1, 0.5) b) Binomial(0.1, 0.5)
c) Binomial(1, 0.05) d) Binomial(0.1, 0.05)
e) $\mathcal{N}(0.5, 0.025)$ f) Keine der Antworten a)-e) trifft zu
- 3) Es sei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Was ist $P[Z^2 \leq 4]$?
- a) $\Phi(2)$ b) $\Phi(2) - \Phi(0)$
c) $\Phi(4) - \Phi(-4)$ d) $\Phi(2) - \Phi(-2)$
- 4) Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f . Wann gilt $P[X = 1] = P[X = -1]$?
- a) Immer b) Nie
c) Nur wenn f symmetrisch ist d) Keine Aussage möglich
- 5) Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{x}, & x \geq c \\ 0, & x < c \end{cases}.$$

Geben Sie alle für c zulässigen Werte an.

- a) $c = 3$ b) $c = 0$ c) $c \leq 1$
d) $c \geq 3$ e) $c \in \mathbb{R}$ f) Keine der Antworten a)-e) trifft zu
- 6) Ein exaktes einseitiges 95% Vertrauensintervall für den Erfolgsparameter p einer Binomial(n, p) Verteilung sei gegeben durch $[0, 0.51]$. Wird die Nullhypothese $H_0 : p = 0.5$ bei einem einseitigen Test auf dem 1%-Niveau verworfen?
- a) Ja b) Nein
c) Das hängt von n ab d) Keine Aussage möglich
- 7) Beim Roulette bleibt die Kugel mit Wahrscheinlichkeit $1/37$ auf der 12 liegen. Falls die Kugel auf der 12 liegen bleibt, gewinnen Sie 35'000 Franken, andernfalls verlieren Sie 1'000 Franken. Was ist der erwartete Gewinn (auf ganze Franken gerundet)?
- a) -54 b) 37 c) 350
d) -12 e) 27 f) Andere Zahl

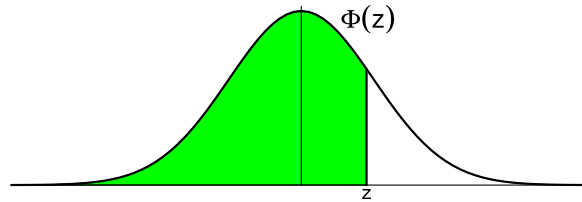
8) Für drei Stichproben vom Umfang $n = 100$ wurden je ein Boxplot und die empirische Verteilungsfunktion gezeichnet:



Ordnen Sie die drei Boxplots den entsprechenden empirischen Verteilungsfunktionen zu.

- a) 1a, 2b, 3c b) 1b, 2a, 3c c) 1c, 2a, 3b
d) 1a, 2c, 3b e) 1b, 2c, 3a f) 1c, 2b, 3a

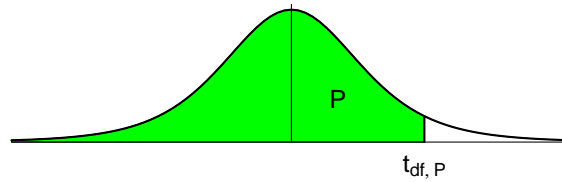
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = P[Z \leq z]$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$



Bsp.: $P[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9; 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576