Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** **(1 Punkt)** Gepaart (0.5 P), da jeweils dieselbe Person einmal mit dem einen Balltyp und einmal mit dem anderen Balltyp aufschlägt. (0.5 P)

b) **(1 Punkt)** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ (0.5 P), $H_A : \mu_X > \mu_Y$ (0.5 P)

c) **(2 Punkte)**

- Der Wert der Teststatistik ist (0.5 P)

$$t = \frac{\sqrt{12} * 0.27}{0.72} = 1.30$$

- Der Verwerfungsbereich ist (1 P)

$$K = (t_{11,95\%}, \infty) = (1.796, \infty)\,.$$

- Weil $1.30 \notin K$, wird H_0 beibehalten (0.5 P).

d) **(2 Punkte)** Das einseitiges 95%-Vertrauensintervall ist gegeben durch

$$\left(\mu_X - \mu_Y - t_{11,95\%} * \frac{\hat{\sigma}_{X-Y}}{\sqrt{n}}, \infty\right) = \left(0.27 - 1.796 * \frac{0.72}{\sqrt{12}}, \infty\right) = (-0.103, \infty).$$

e) **(1 Punkt)** Wenn σ_{X-Y} bekannt ist, wir müssen mit der Standardnormalverteilung und nicht mehr mit der t-Verteilung arbeiten. Das einseitiges 95%-Vertrauensintervall ist also gegeben durch (1 P)

$$\left(\mu_X - \mu_Y - \Phi^{-1}(1-\alpha) * \frac{\sigma_{X-Y}}{\sqrt{n}}, \infty\right).$$

2. a) (1 Punkt)

- R_n: Anzahl roter Ameisen aus n ausgewählten Ameisen.
- $p = 0.1$: Wahrscheinlichkeit, dass eine Ameise rot ist.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[R_5 = 3\right] &= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ &= 10 * 0.00081 = 0.0081 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

b) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} R_{150} &\sim \mathrm{Bin}\left(150, 0.1\right) \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ \mathbf{E}\left[R_{150}\right] &= 150 \cdot 0.1 = 15 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ \mathrm{Var}\left(R_{150}\right) &= 150 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 13.5 \qquad \textbf{(1 P)} \end{aligned}$$

c) (2 Punkte)

Normalapproximation (i.o. da $150 * 0.1 * 0.9 = 13.5 > 9$):

$$\begin{aligned} R_{150} &\sim \mathcal{N}\left(15, 13.5\right) \\ \mathrm{P}\left[15 \leq R_{150} \leq 20\right] &= \mathrm{P}\left[0 \leq Z \leq \frac{20-15}{\sqrt{13.5}}\right] \qquad \textbf{(1 P)} \\ &= \mathrm{P}\left[Z \leq 1.36\right] - 0.5 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ &= 0.9131 - 0.5 = 0.4131 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

d) (3 Punkte)

- Normalapproximation: $R_{150} \sim \mathcal{N}\left(15, 13.5\right)$ **(0.5 P)**
- Nullhypothese vs. Alterntivhypothese

$$\begin{aligned} H_0 &: \; p = 0.1 \\ H_1 &: \; p \neq 0.1 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

- 2 seitiger Z-Test auf 5% Niveau: Verwerfe Nullhypothese falls

$$|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \qquad \textbf{(0.5 P)}$$

wobei

$$u = \frac{20-15}{\sqrt{13.5}} \qquad \textbf{(1 P)}$$

- Testentscheid: H_0 wird nicht verworfen, da $u = 1.36 < 1.96$. **(0.5 P)**

3. Die Wahrscheinlichkeit dass ein Dieb den Alarm auslöst ist $p_{d,a} = 0.89$. Die Wahrscheinlichkeit dass ein Dieb den Alarm nicht auslöst ist $1 - p_{d,a} = 0.11$.

Die Wahrscheinlichkeit dass ein normaler Kunde (kein Dieb) den Alarm auslöst ist $p_{k,a} = 0.05$. Die Wahrscheinlichkeit dass ein normaler Kunde den Alarm nicht auslöst ist $1 - p_{k,a} = 0.95$.

a) (2 Punkte)
$\mathrm{P}\left[\{\text{mindestens einer der 3 Diebe löst den Alarm aus}\}\right] = 1 - (1 - p_{d,a})^3 = 1 - 0.11^3 = 0.999$ **(1 Punkt)**

$\mathrm{P}\left[\{\text{genau 2 Diebe lösen den Alarm aus}\}\right] = 3 \cdot (1 - p_{d,a}) \cdot {p_{d,a}}^2 = 3 \cdot 0.11 \cdot 0.89^2 = 0.261$ **(1 Punkt)**

b) (2 Punkte)
Busse welche von geschnappten Dieben bezahlt werden muss: k
Erwarteter Verlust per Dieb:
$p_{d,a} \cdot k - (1 - p_{d,a}) \cdot 70$ **(1 Punkt)**
Busse so dass keinen Verlust entsteht:
$p_{d,a} \cdot k - (1 - p_{d,a}) \cdot 70 = 0$ **(0.5 Punkt)**
$k = (1 - p_{d,a}) \cdot 70/p_{d,a} = 0.11 \cdot 70/0.89 = 8.65$ CHF **(0.5 Punkt)**

c) (3 Punkte)
Wahrscheinlichkeit dass ein Kunde ein Dieb ist: p_d
Wahrscheinlichkeit dass die Alarmanlage von einem Dieb ausgelöst wurde:
$p_d \cdot p_{d,a}$ **(0.5 Punkt)**
Wahrscheinlichkeit dass die Alarmanlage von einem normalen Kunden ausgelöst wurde: $(1 - p_d) \cdot p_{k,a}$ **(0.5 Punkt)**
Ein Drittel der Alarme sind Fehlalarme. Es gibt also 2 Mal mehr Alarme aufgrund von echten Diebstählen als aufgrund von Fehlern:
$p_d \cdot p_{d,a} = 2 \cdot (1 - p_d) \cdot p_{k,a}$ **(1 Punkt)**

$p_d = \frac{2 \cdot p_{k,a}}{p_{d,a} + 2 \cdot p_{k,a}} = 0.101$ **(1 Punkt)**

d) (2.5 Punkte)
N_1 = Anzahl Diebe unter 16 Jahren, N_2 = Anzahl Diebe zwischen 16 und 20 Jahren, N_3 = Anzahl Diebe zwischen 21 und 30 Jahren, N_4 = Anzahl Diebe über 30 Jahren.

Es ist $\mathrm{P}\left[N_1 + N_2 > N_3 + N_4\right] = \mathrm{P}\left[N_1 + N_2 - N_3 - N_4 > 0\right]$ **(0.5 Punkt)**, wo $N_1 + N_2 - N_3 - N_4$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 50 und Varianz 569 **(1 Punkt)**.

Somit ist $\mathrm{P}\left[N_1 + N_2 > N_3 + N_4\right] = \Phi(\frac{50}{\sqrt{569}}) = \Phi(2.10) = 99.21\%$ **(1Punkt)**

e) **(3 Punkte)**
Meisten Diebe jünger als 16-jährig: $\mathrm{P}\left[N_2 + N_3 + N_4 < 600 - N_2 - N_3 - N_4\right] = \mathrm{P}\left[N_2 + N_3 + N_4 < 300\right]$ **(1 Punkt)**,
wo $N_2 + N_3 + N_4$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 350 und Varianz 425 **(1 Punkt)**.

Somit ist $\mathrm{P}\left[N_2 + N_3 + N_4 < 300\right] = \mathrm{P}\left[Z < \frac{300-350}{\sqrt{425}}\right] = 1 - \Phi(\frac{50}{\sqrt{425}}) = 1 - \Phi(2.43) = 1 - 0.9925 = 0.75\%$ **(1 Punkt)**

4. 1) d
2) c
3) a
4) d
5) f
6) d
7) b
8) e

5. 1) d
2) a
3) c
4) d
5) d
6) b
7) b
8) c