

Bachelorprüfung: Mathematik 4 - Statistik (2 Stunden)

Bemerkungen:

- Es sind alle schriftlichen Hilfsmittel und der Taschenrechner erlaubt.
- Natels sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Wenn nicht anders vermerkt, sind die Tests auf dem 5%-Niveau durchzuführen.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Aufgaben 4 und 5 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice-Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple-Choice-Aufgaben mit Kreuzchen in das separate Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. (10 Punkte)

Im berühmten Wintersportort Weissbergen erwägt man angesichts des Klimawandels, das Schmelzen des Schnees auf den Pisten durch ein künstliches Schneehärtungsmittel (das den Schnee erst bei höheren Temperaturen schmelzen lässt) einzudämmen. Um die Effektivität dieses Mittels zu testen, werden 26 Pisten um Weissbergen herum zufällig ausgewählt, die nach jedem grösseren Schneefall mit dem Härtemittel behandelt werden. Weitere 36 zufällig gewählte Pisten dienen als Kontrollgruppe. Auf all diesen Pisten gibt es bereits eine automatisierte Schneehöhen-Messstation mit integriertem Schneefallsmesser, so dass insgesamt die reine *Abschmelzrate* an jeder Station ermittelt werden kann.

Die Schneeschmelzraten (in mm/Tag) an den Messstationen auf den behandelten Pisten sind X_1, \dots, X_{26} , mit Durchschnitt \bar{X} und Varianz $\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{26} (X_i - \bar{X})^2$. Entsprechend werden die Messwerte für die unbehandelten Pisten mit Y_1, \dots, Y_{36} bezeichnet, mit Durchschnitt \bar{Y} und Varianz $\hat{\sigma}_Y^2$. Die gepoolte Varianz über beide Stichproben ist S_{pool}^2 . Ferner nehmen wir an, die Messdaten seien jeweils unabhängig voneinander und normalverteilt: die X_i als $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und die Y_i als $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Ermittelt wurde:

\bar{X}	15.4
$\hat{\sigma}_X^2$	13.8
\bar{Y}	19.7
$\hat{\sigma}_Y^2$?
S_{pool}^2	17.2

- Muss ein gepaarter oder ein ungepaarter Test durchgeführt werden? (Begründen Sie!)
- Wie gross ist die geschätzte Varianz $\hat{\sigma}_Y^2$ der Schmelzraten der Kontrollgruppe?
- Geben Sie die Null- und Alternativhypothese eines t-Tests an, der die Effektivität des Härtemittels beim Bekämpfen der Schneeschmelze testet.
- Geben Sie ein einseitiges 95%-Konfidenzintervall an für die Differenz $\mu_x - \mu_y$. Was ist angesichts dieses Konfidenzintervalles das Resultat des t -Tests aus (c)?
- Würden Sie anhand dieser Ergebnisse zusätzlich einen Vorzeichenstest empfehlen? Weshalb, respektive weshalb nicht?

2. (10 Punkte)

An einer vielbefahrenen Strassenkreuzung (Verkehrsaufkommen von über 10'000 Fahrzeugen pro Tag) wurde während des Jahres 2006 die Anzahl an Verkehrsunfällen pro Kalenderwoche erfasst. Im untenstehenden Datensatz sind die wöchentlichen Unfallanzahlen und deren Häufigkeit gegeben; beispielsweise gab es 12 Wochen, in denen jeweils genau 3 Unfälle passiert sind. Es wurde während insgesamt 52 Wochen gemessen. Saisonale Effekte wurden keine festgestellt; ausserdem können wir annehmen, dass die Anzahl Unfälle in verschiedenen Wochen unabhängig sind.

Unfälle pro Woche	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Wochen	4	8	10	12	9	5	3	1

- Erklären Sie kurz, wieso für die Anzahl Unfälle pro Kalenderwoche eine Poissonverteilung sinnvoll ist.
- Passen Sie eine Poissonverteilung an die Daten an; überlegen Sie sich hierzu einen geeigneten Schätzer für den Parameter λ . Wie gross ist gemäss der angepassten Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig gewählten Woche mindestens 3 Unfälle passiert sind?

Um die Verkehrssicherheit zu erhöhen wurden zu Beginn des Jahres 2007 Radarfallen an besagter Kreuzung aufgestellt. Im Laufe dieses Jahres (52 Kalenderwochen) ereigneten sich insgesamt 131 Unfälle. Wir testen, ob sich die Unfallanzahl gegenüber 2006 signifikant verringert hat. Nehmen Sie an, dass im Jahr 2006 die Anzahl Unfälle pro Kalenderwoche Poisson-verteilt ist mit wahrem Parameter $\lambda = 3$ (verwenden Sie **nicht** Ihre Schätzung aus dem vorigen Aufgabenteil).

- Wie ist die **jährliche** Anzahl Unfälle im Jahr 2006 verteilt? *Hinweis:* Summen von unabhängigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen sind selbst auch wieder Poisson-verteilt.
- Formulieren Sie die Nullhypothese und die zugehörige Alternative. Ist der Test einseitig oder zweiseitig durchzuführen?
- Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich auf dem 5%-Niveau und den P-Wert. Benutzen Sie zur Berechnung eine geeignete Approximation. Haben sich die Anzahl der Unfälle durch die Massnahme signifikant reduziert?

3. (10 Punkte)

An einer Universität studieren sehr viele Studenten Medizin. Ziel dieser Aufgabe ist es, anhand einer Stichprobe von 22 Medizinstudenten den Männeranteil abzuschätzen. Für die ersten drei Teilaufgaben gehen wir davon aus, dass an dieser Universität 50% der Medizinstudenten Männer sind.

- a) Welche Verteilung besitzt die Anzahl Männer in dieser Stichprobe? Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz dieser Verteilung.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe 10 Männer sind.

Als Approximation der Binomialverteilung werden häufig die Poisson- und die Normalverteilung verwendet.

- c) Wiederholen Sie die Rechnung aus **b)** mittels der Poisson-Approximation. Ist die Poisson-Approximation hier angebracht? Begründen Sie! Benutzen Sie zudem die Normal-Approximation zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 10 Männer in der Stichprobe sind.

Eine Auszählung ergab, dass von den 22 Medizinstudenten 6 Frauen sind. Ist diese Häufigkeit vereinbar mit der bisher angenommenen Hypothese, dass die Hälfte der Medizinstudenten an dieser Universität Männer sind?

- d) Führen Sie dazu einen Test auf dem 5% Niveau durch. Benützen Sie dazu die Normal-Approximation. Formulieren Sie dabei Null- und Alternativhypothese, Teststatistik, Verwerfungsbereich und Testentscheid.
- e) Berechnen Sie den P-Wert für das Testproblem aus Aufgabe **d)**. Auf welchem Signifikanzniveau wird die Nullhypothese gerade noch verworfen?

4. (10 Punkte)

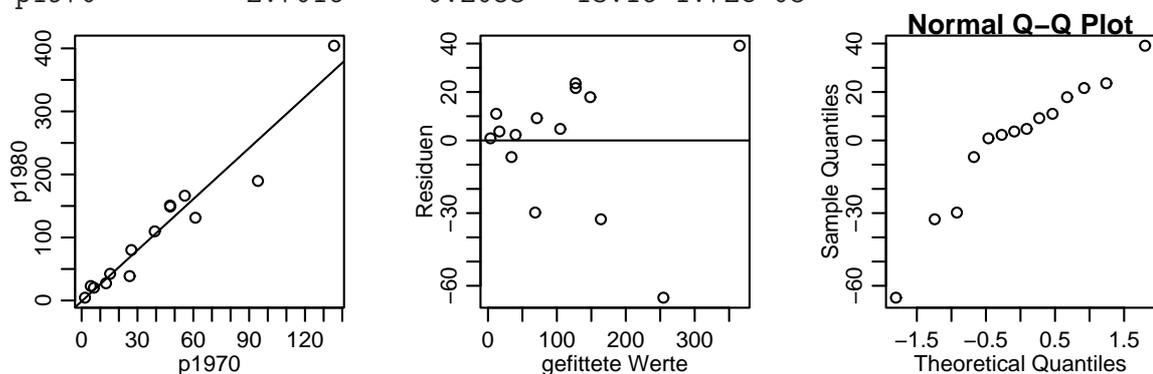
Die Preise für Meeresfrüchte und Fische sind in den USA zwischen 1970 und 1980 stark gestiegen. In einer Studie werden die Preise (in Cent), die ein Fischer im Jahr 1970 und im Jahr 1980 für ein Pfund Ware erhielt, verglichen. Der Datensatz enthält die Angaben zu 14 Fischarten. Es wird eine lineare Regression durchgeführt. Die erklärende Variable ist der Preis im Jahr 1970, und die Zielvariable ist der Preis im Jahr 1980. Das Modell ist

$$p1980_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot p1970_i + E_i, \quad E_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d.}$$

Hier sind der R-Output und einige Plots:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-1.2338	11.2579	-0.11	0.915
p1970	2.7016	0.2053	13.16	1.72e-08 ***



- 1) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
 - a) Die Modellannahmen über die Fehler scheinen plausibel.
 - b) Der Normalplot deutet auf eine Zunahme der Fehlervarianz mit \hat{y}_i hin.
 - c) Der Tukey-Anscombe Plot deutet auf eine Zunahme der Fehlervarianz mit \hat{y}_i hin.
 - d) Die Plots für die Residuenanalyse sehen nicht so gut aus. Das macht jedoch nichts, da die Modellanpassung ziemlich gut aussieht.
- 2) Was sollte man machen, wenn man bei der Residuenanalyse feststellt, dass die Varianz des Fehlers linear mit \hat{y}_i zunimmt?
 - a) Wenn die Modellanpassung trotzdem gut aussieht, kann man das Modell ohne weiteres verwenden.
 - b) Man muss das Modell abändern. Man sollte die Zielvariable logarithmieren und ausprobieren, ob die Fehler nun besser verteilt sind.
 - c) Wenn der Normalplot gut aussieht, gibt es keinen Grund das Modell zu ändern.
 - d) Man muss das Modell ändern. Variablentransformationen genügen nicht. Man braucht einen ganz anderen Ansatz (keine lineare Regression).

Sowohl die Zielvariable wie auch die erklärende Variable werden logarithmiert (natürlicher Logarithmus). Das neue Modell sieht so aus:

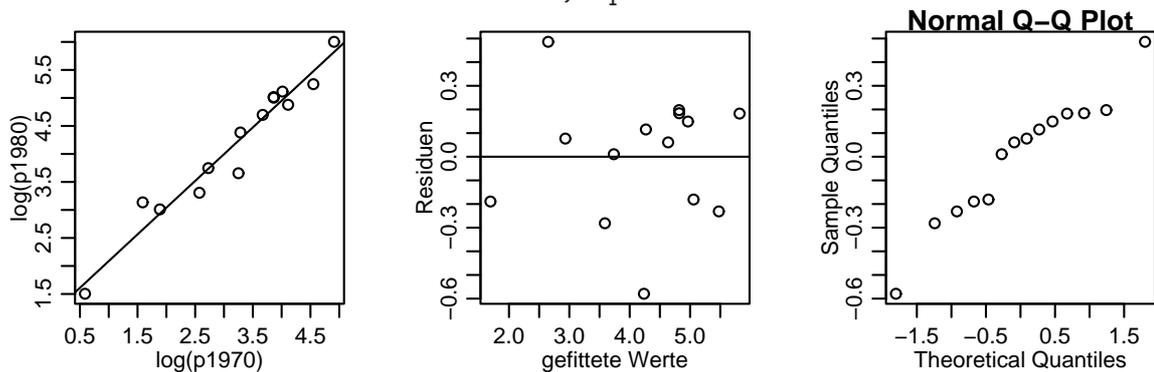
$$\log(p1980_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log(p1970_i) + E_i, \quad E_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d.}$$

Hier sind der R-Output und einige Plots:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	1.13231	0.21664	5.227	0.000212	***
log(p1970)	0.95465	0.06349	???	???	???

Residual standard error: 0.2776 on ?? degrees of freedom
 Multiple R-Squared: 0.9496, Adjusted R-squared: 0.9454
 F-statistic: 226.1 on 1 and ?? DF, p-value: 3.782e-09



Die Fragen 3 bis 9 beziehen sich auf das neue Modell.

- 3) Wieviele Freiheitsgrade hat die geschätzte Standardabweichung für den Fehler $\hat{\sigma}$?
 a) 12 b) 13 c) 2 d) 14 e) 15 f) 16
- 4) Wie gross ist die t-Teststatistik für den Test der Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 0$?
 a) 0.067 b) 15.036 c) 3.789
 d) 0.063 e) 0.891 f) 23.682
- 5) Wird $H_0 : \beta_1 = 0$ auf dem 5% Niveau verworfen (die Alternative ist $H_A : \beta_1 \neq 0$)?
 a) Ja b) Nein c) Keine Aussage möglich
- 6) Welches der folgenden Intervalle ist ein exaktes zweiseitiges 95% Vertrauensintervall für β_1 ?
 a) $0.95465 \pm 1.96 \cdot \frac{0.06349}{\sqrt{12}}$ b) $0.95465 \pm 2.179 \cdot \frac{0.06349}{\sqrt{12}}$
 c) $0.95465 \pm 1.96 \cdot 0.06349$ d) $0.95465 \pm 2.179 \cdot 0.06349$
- 7) Im R-Output enthält die Spalte Pr(>|t|) für die Zeile log(p1970) den p-Wert für $H_0 : \beta_1 = 0$ und ...
 a) $H_A : \beta_1 < 0$ b) $H_A : \beta_1 > 0$
 c) $H_A : \beta_1 \neq 0$ d) Keine Aussage möglich
- 8) Die Fischer erhielten im Jahr 1970 42.30 Cent für den Lachs. Welchen Preis sagt das Regressionsmodell für den Lachs im Jahr 1980 voraus?
 a) 4.70 b) 41.50 c) 3.75 d) 119.20 e) 110.75

9) Welche der folgenden Aussagen über $R^2 = 0.9496$ stimmt?

- a) Das Regressionsmodell ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 5.46% falsch.
- b) Das Regressionsmodell erklärt die Variabilität der Daten mit einer Wahrscheinlichkeit von 94.96%.
- c) Das Regressionsmodell erklärt wenig der totalen Variabilität in den Daten.
- d) Das Regressionsmodell erklärt 94.96% der totalen Variabilität in den Daten.

10) Für die letzte Aufgabe passen wir das Modell nochmals an. Der Fischpreis von 1980 soll anhand der Preise im Jahr 1978 und 1979 erklärt werden. Das Modell sieht so aus:

$$p1980_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot p1978_i + \beta_2 \cdot p1979_i + E_i, \quad E_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{i.i.d.}$$

Hier ist der R-Output:

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.721	6.128	1.260	0.234
p1978	-3.826	6.191	-0.618	0.549
p1979	4.014	6.192	0.648	0.530

Residual standard error: 15.49 on ?? degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9816, Adjusted R-squared: 0.9783

F-statistic: 294.1 on 2 and ?? DF, p-value: 2.827e-10

Wird die Zielgrösse mindestens von einer der beiden erklärenden Variablen (p1978 und p1979) signifikant beeinflusst?

- a) Ja.
- b) Nein.
- c) Das kann man nur anhand von zwei einfachen Regressionen entscheiden.
- d) Keine Aussage möglich.

5. (9 Punkte)

Das radioaktive Teilchen U-239 zerfällt spontan nach einer Zeit T , gemessen in Sekunden. Man weiss, dass $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = 0.0004916$.

- 1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen erst nach 1000 oder mehr Sekunden zerfällt?
 - a) 0.6106
 - b) 0.6116
 - c) 0.7106
 - d) 0.5106
 - e) 0.5
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch
- 2) Die Zeit t_H , die vergeht, bis die Wahrscheinlichkeit genau 50 Prozent beträgt, dass das Teilchen noch nicht zerfallen ist, heisst (stochastische) Halbwertszeit. Welche der untenstehenden Aussagen gilt also für t_H ?
 - a) $P[T \leq 0.5] = t_H$
 - b) $P[T = 0.5] = t_H$
 - c) $P[T = t_H] = 0.5$
 - d) $P[T \leq t_H] = 0.5$
 - e) $P[T = t_H] \leq 0.5$
 - f) $P[T = 0.5] \leq t_H$
- 3) Berechnen Sie nun t_H , gerundet auf Sekunden.
 - a) 0.5 Sekunden
 - b) 1350 Sekunden
 - c) 1410 Sekunden
 - d) 120 Sekunden
 - e) 190 Sekunden
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch

Die *stetige* Zufallsvariable X hat die kumulative Verteilungsfunktion

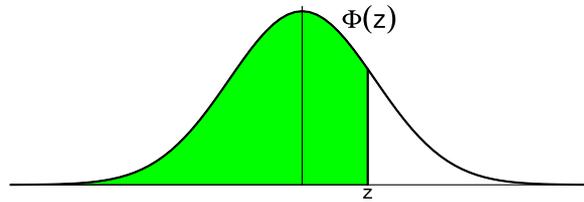
$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \cdot x^\beta & x \in [0, 16] \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 16 \end{array} \right\}.$$

- 4) Wie gross ist die Konstante α für $\beta = 1/4$?
 - a) 1/4
 - b) 1/2
 - c) 4
 - d) 2
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch
- 5) Welchen Wert hat der Median für $\alpha = 1/4$ und $\beta = 1/2$?
 - a) 1/4
 - b) 1/2
 - c) 4
 - d) 2
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch
- 6) Berechnen Sie den Erwartungswert für $\alpha = 1/4$ und $\beta = 1/2$.
 - a) 1/4
 - b) 1/2
 - c) 4
 - d) 2
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch

Sei $X \sim \mathcal{N}(3, 9)$ und $Y = 2 + \frac{1}{3} \cdot X$.

- 7) Berechnen Sie $\text{Var}(Y)$.
 - a) 0
 - b) $\frac{1}{3}$
 - c) 0.5
 - d) 0.75
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch
- 8) Berechnen Sie $P[Y \geq 3]$.
 - a) 0
 - b) $\frac{1}{3}$
 - c) 0.5
 - d) 0.75
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch
- 9) Wie gross ist die Korrelation zwischen X und Y ?
 - a) 0
 - b) $\frac{1}{3}$
 - c) 0.5
 - d) 0.75
 - e) 1
 - f) Aussagen a) bis e) sind falsch

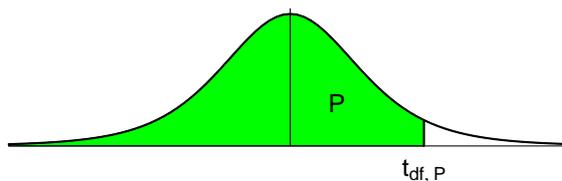
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = P[Z \leq z]$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $P[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9; 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576