Musterlösung

1. (9 Punkte) F. Lauer möchte das Gerücht überprüfen, dass Blumen schneller wachsen, wenn man mit ihnen redet. Daher kauft sie acht identische Blumenzwiebeln, schickt jeweils zwei davon zu jedem ihrer vier Kinder und bittet sie, die beiden Blumenzwiebeln genau gleich zu behandeln. Mit dem einzigen Unterschied, dass sie nur mit der einen Blume reden sollen. Nach sechs Wochen erkundigt sie sich, wie hoch die Blumen gewachsen sind und erhält folgende Antworten (in cm):

Kind	1	2	3	4
Blume (beredet)	30.3	32.2	29.9	30.1
Blume (nicht beredet)	30.1	31.9	29.9	30.0

Nun möchte sie mit Hilfe dieser Daten herausfinden, ob an dem Blumengerede etwas dran ist und bittet Sie, einen geeigneten statistischen Test durchzuführen. Nehmen Sie an, dass die Differenzen Höhe Blume (beredet) minus Höhe Blume (nicht beredet) normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind.

a) Es handelt sich um einen gepaarten Test. Warum?
Jeder beredeten Blume kann eindeutig eine nicht beredete Blume zugeordnet werden: diejenige, die vom selben Kind gepflegt wird. (1 Punkt)

b) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an und begründen Sie kurz Ihre Wahl.

$$H_0 : \mu = 0 \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$
$$H_A : \mu > 0 \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$

wobei μ der Erwartungswert von $D_i = X_i - Y_i$ ist mit X_i: Höhe der Blume (beredet), Y_i: Höhe der Blume (nicht beredet).
Mehrheitlich wird geglaubt, dass das Reden mit Blumen (bei ansonsten gleicher Behandlung) keinen Unterschied macht. Wenn man dies also nach einem Experiment behauptet, möchte man sich sicher sein, dass seine Aussage auch stimmt. Die Wahrscheinlichkeit des Fehlers "Reden macht keinen Unterschied, aber ich behaupte, er macht einen." ist also zu beschränken. Daher wird dies der Fehler erster Art. Da F. Lauer nur ein schnelleres (aber kein langsameres) Wachstum interessiert, ziehen wir einen einseitigen Test vor: Er hat eine größere Macht als der zweiseitige Test. (1 Punkt)

c) Geben Sie eine Schätzung $\hat{\sigma}^2$ für die Varianz σ^2 der Differenz an (mit Lösungsweg). Mit $n = 4$ erhalten wir

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{4}(0.2 + 0.3 + 0 + 0.1) = 0.15$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 \qquad (0,5 \text{ Punkte})\\ &= \frac{1}{3}\left((0.05)^2 + (0.15)^2 + (0.15)^2 + (0.05)^2\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(2 \cdot 0.0025 + 2 \cdot 0.0225\right) = \frac{1}{3}0.05 = \frac{5}{300} \qquad (0,5 \text{ Punkte})\end{aligned}$$

d) Führen Sie den geeigneten t-Test zum Niveau 0.05 durch: Bestimmen Sie den Wert der Teststatistik T und dessen Verteilung unter der Nullhypothese, den Verwerfungsbereich für T und den Testentscheid. (Wenn Sie obige Aufgabe c) nicht lösen konnten, benutzen Sie im Folgenden $\hat{\sigma}^2 = \frac{5}{300}$.)

1. Modell: $D_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
2. Nullhypothese: $H_0 : \mu = 0$
   Alternative: $H_A : \mu > 0$

3. Teststatistik:

$$T = \frac{\sqrt{n}\bar{D}}{\hat{\sigma}} = \frac{\sqrt{4}\cdot(0.15)}{\sqrt{\frac{5}{300}}} \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$
$$\approx 2.324 \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$

Verteilung von T unter H_0: $T \sim t_{n-1} = t_3$. (0,5 Punkte)

4. Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$
5. Verwerfungsbereich:

$$K_1 = [t_{n-1;1-\alpha};\infty) \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$
$$= [t_{3;0.95};\infty) = [2.353;\infty) \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$

6. Testentscheid: $T \notin K_1 \Rightarrow H_0$ wird nicht verworfen. (0,5 Punkte)

e) Bestimmen Sie ein einseitiges 95%-Vertrauensintervall für μ.

$$0.95 \le \mathbf{P}\left(t_{n-1;1-\alpha} \ge \sqrt{n}\frac{\bar{D}-\mu}{\hat{\sigma}}\right) = \mathbf{P}\left(\mu \ge \bar{D} - \frac{\hat{\sigma}t_{n-1;1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\Rightarrow \qquad \text{VI} = \left[\bar{D} - \frac{\hat{\sigma}t_{n-1;1-\alpha}}{\sqrt{n}};\infty\right) \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$
$$\approx [-0.002,\infty) \qquad (0,5 \text{ Punkte})$$

f) Sie sind der statistische Berater von F. Lauer und haben die Berechnungen durchgeführt. Was sagen Sie ihr nun?
Liebe F. Lauer.
Derzeit gibt es keinen Grund, der Sprich-mit-Blumen-Theorie Glauben zu schenken. (0,5 Punkte)
Allerdings wurde die Nullhypothese nur gerade ebenso nicht abgelehnt und die Samplegröße ist sehr klein. Daher empfehle ich Ihnen, das Experiment in größerem Maßstab zu wiederholen. (0,5 Punkte)

2. a) Wie ist X verteilt? Binomialverteilt (0.5 Punkte) mit Parametern 10 und $\pi = 0.6$. (0.5 Punkte)

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Passanten das Plakat betrachtet haben? $P(X = 0) = 0.4^{10} \approx 0.0001$. (1 Punkt)

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl der erste als auch der fünfte Passant das Plakat nicht betrachtet haben? $0.6 * 0.6 = 0.36$. (1 Punkt)

d) Was sind die Null- und die Alternativhypothese?

$$H_0 : \pi \le 0.6 \qquad H_A : \pi > 0.6 \quad (1 \text{ Punkt})$$

e) Führen Sie einen geeigneten, exakten Test durch. Geben Sie den Verwerfungsbereich für X und den Testentscheid an.
1. Model: $X \sim \text{Bin}(10,\pi)$ ist die Anzahl der Passanten die das Plakat nicht betrachten
2. Nullhypothese: siehe oben
3. Teststatistik: $T = X$, Verteilung von T unter H_0: $T \sim \text{Bin}(10, 0.6)$
4. Signifikanznivau: $\alpha = 0.05$
5. Verwerfungsbereich:
Da $P(X = 10) = 0.6^{10}$, $P(X \ge 9) = 0.6^{10} + 10 * 0.4 * 0.6^9$, $P(X \ge 8) = 0.6^{10} + 10 * 0.4 * 0.6^9 + 10 * 9/2 * 0.4^2 * 0.6^8$, gilt

	x=8	x=9	x=10
$P(X \ge x)$	0.1673	0.0464	0.006

Also, ist der Verwerfungsbereich $\{9, 10\}$. (2 Punkte)
6. Testentscheid: Da $7 \notin \{9, 10\}$ wird nicht verworfen (1 Punkt, mit Folgefehler).

f) Die Genfer Konkurrenzfirma Tasvue will nun einen ähnlichen Versuch durchführen. Im Speziellen will Tasvue den gleichen Versuchsaufbau (mit n Passanten) und den gleichen Test (ebenfalls zum Signifikanzniveau 0.05) anwenden. Beschreiben Sie ganz kurz, wie der Fehler 2. Art im Vergleich zu oben reduziert werden könnte. Es könnten mehr Passanten befragt werden. (1 Punkt)

3. a) (1 Punkt) Wir bezeichnen mit p die abgegebenen Pässe und mit a die angekommenen Pässe.

$$P(p=4, a=4) = \binom{4}{4} \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^0 = 0.5^4 = 0.0625$$

b) (1 Punkt)

$$P(p=3, a=0) = \binom{3}{1} \cdot 0.9^1 \cdot 0.1^2 = 3 \cdot 0.9 \cdot 0.1^2 = 0.027$$

c) (1 Punkt) Ein Doppelpass gelingt mit Wahrscheinlichkeit: $0.9 \cdot 0.5 = 0.45$

d) (1.5 Punkte) A_n sei die Anzahl angekommener Pässe. A_n ist binomialverteilt. Mit 20 Pässen von Fabio haben wir:

$$\begin{aligned} A_{20} &\sim \text{Bin}(20, 0.5) \quad \text{(0.5P)} \\ \mathbf{E}[A_{20}] &= n \cdot \pi = 20 \cdot 0.5 = 10 \quad \text{(0.5P)} \\ \text{Var}(A_{20}) &= n \cdot \pi \cdot (1-\pi) = 20 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 5 \quad \text{(0.5P)} \end{aligned}$$

e) (1.5 Punkte) Mit einer Normalapproximation (0.5P). (D.h. mit einer Normalverteilung.) $A_n \sim \mathcal{N}(n\pi, n\pi(1-\pi))$. $A_{952} \sim \mathcal{N}(856.8, 85.68)$ (1P).

f) (3 Punkte) Normalapproximation $\mathcal{N}(856.8, 85.68)$ (0.5P).

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 856.8 \\ H_A &: \mu \neq 856.8 \quad \text{(0.5P)} \end{aligned}$$

z-Test zweiseitig auf $\alpha = 5\%$ Niveau. D.h. ich verwerfe die Nullhypothese falls:

$$|z| > z_{1-\alpha/2} = 1.96 \quad \text{(0.5P)}$$

wobei

$$z = \frac{831 - 856.8}{\sqrt{85.68}} = -2.787276 \approx -2.79 \quad \text{(1P)}$$

Die Nullhypothese wird verworfen. (0.5P)

4. (7 Punkte) Es wird untersucht, inwiefern die Regenmenge (rain) durch die Luftfeuchtigkeit (humidity) und den Taupunkt (dewpoint) beinflusst wird. Es wurden 100 Messungen gemacht und folgendes Modell angepasst:

$$\text{rain}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{humidity}_i + \beta_2 \cdot \text{dewpoint}_i + \varepsilon_i, \qquad \varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, 100.$$

Der (unvollständige) Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-2.652 -0.566  0.075  0.660  2.359

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.0158     0.0990    0.16     0.87
humidity    -12.5499        ???   -1.24     0.22
dewpoint    -15.5496    10.1130     ???      ???
Residual standard error: 0.974 on ?? degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.896,       Adjusted R-squared: 0.894
F-statistic:  420 on 2 and ?  DF,  p-value: <2e-16
```

1) Was ist der Standardfehler von $\hat{\beta}_1$? (auf eine signifikante Stelle genau)
   a) 10
   b) 1
   c) 100
   d) 0.1

   a (10)

2) Was ist der p-Wert von $\hat{\beta}_2$? (auf eine signifikante Stelle genau)
   a) 0.001
   b) 0.01
   c) 0.1
   d) 1

   c (≈ 0.1)

3) Mit wievielen Freiheitsgraden wurde der "residual standard error" berechnet?
   a) 97
   b) 98
   c) 2
   d) 3

   a (97)

4) Berechnen Sie das exakte 99%-Konfidenzintervall für β_2 (verwenden Sie 90 Freiheitsgrade).
   a) $[-18.2, -12.9]$
   b) $[-39.5, 8.4]$
   c) $[-16.9, -14.1]$
   d) $[-42.2, 11.1]$

   d ($[-42.2, 11.1]$)

5) Gibt es einen signifikanten Zusammenhang (5% Niveau) zwischen rain und mindestens einer der erklärenden Variablen?
   a) Ja.
   b) Nein.
   c) Keine Angabe möglich.

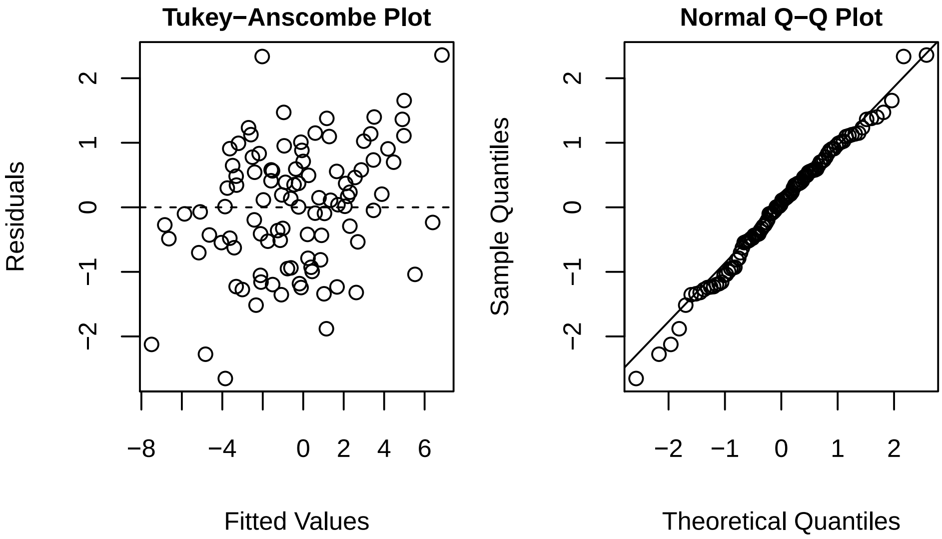
   a (Ja. Die F-statistik, welche testet ob mindestens einer der Koeffizienten von 0 verschieden ist, ist hoch signifikant.)

6) Wie ändert sich das multiple R-squared, wenn man eine dritte Variable aufnehmen würde, die für rain relevant und mit den beiden bisherigen Variablen unkorreliert ist?
   a) Es wird grösser.
   b) Es bleibt ungefähr gleich.
   c) Es wird kleiner.
   d) Keine Aussage möglich.

   a (Es wird grösser.)

7) Betrachten Sie die nachfolgenden Plots. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?
   a) Alle Modellannahmen sind erfüllt.
   b) Die Fehlervarianz ist nicht konstant, aber die Normalverteilungsannahme ist plausibel.
   c) Die Fehlervarianz ist konstant, aber die Normalverteilungsannahme trifft nicht zu.
   d) Sowohl konstante Fehlervarianz als auch Normalverteilungsannahme treffen nicht zu.

   a (Alle Modellannahmen sind erfüllt.)



5. Die folgenden Aufgaben sind zufällig angeordnet und insbesondere nicht nach Schwierigkeitsgrad sortiert.

1) Seien A und B stochastisch unabhänginge Ereignisse. Dann gilt für das Komplement A^C von A:
   a) A^C und B sind stochastisch unabhänging.
   b) A^C und B sind nicht stochastisch unabhänging.
   c) Es kann keine Aussage über die stochastische Abhängigkeit von A^C und B gemacht werden.

   a), denn

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(A^C)P(B).$$

2) Zwei Ereignisse A und B schließen sich aus. Welche Aussage trifft immer zu?
   a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   b) $P(A) = P(B)$.
   c) $P(A) + P(B) < 1$.
   d) $P(A) + P(B) = 1$.

   a), denn $P(A \cap B) = 0$.

3) In einer Kiste seien drei Spielkarten. Eine davon ist auf beiden Seiten schwarz, eine auf beiden Seiten weiss und eine auf einer Seite schwarz und auf der anderen Seite weiss. Es wird zufällig eine Karte gezogen und auf den Tisch gelegt. Angenommen, die Karte ist auf der sichtbaren Seite schwarz. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf der anderen Seite weiss ist?
   a) 1/3.
   b) 1/2.
   c) 1/4.
   d) 2/3.

   a). Da es drei Karten mit je zwei Seiten gibt, gibt es a priori 6 mögliche Ereignisse. Davon fallen drei weg, weil wir wissen, das die Karte oben schwarz ist, und von diesen drei Ereignissen führt nur eines (das, dass die schwarz-weisse Karte beinhaltet) zum geforderten Resultat.

4) Für eine Zufallsvariable Z gelte $\mathrm{E}[Z] = 1$ und $\mathrm{Var}[Z] = 2$. Welchen Wert hat $\mathrm{E}[3Z + 2]$?
   a) 5.
   b) 6.
   c) 7.
   d) 8.

a). Nutze Linearität des Integrals.

5) Für eine Zufallsvariable Z gelte $\mathrm{E}[Z] = 1$ und $\mathrm{Var}[Z] = 2$. Welchen Wert hat $\mathrm{Var}[3Z + 2]$?

   a) 6.
   b) 8.
   c) 18
   d) 20.

c). Nutze Linearität des Integrals.

6) Eine Zufallsvariable $X \in [0, \infty)$ habe die Dichtefunktion $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Was ist die dazugehörige kummulative Verteilungsfunktion?

   a) $F(x) = \lambda x$, $x \in [0, \infty]$.
   b) $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \in [0, \infty]$.
   c) $F(x) = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$, $x \in [0, \infty]$.
   d) $F(x) = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c), nutze $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

7) Eine Zufallsvariable $X \in \mathbb{R}$ habe die kummulative Verteilungsfunktion $F(x) = \alpha \frac{\exp(\lambda x)}{1+\exp(\lambda x)}$, $\lambda > 0$. Welchen Wert hat α?

   a) $\alpha = \frac{1}{4}$.
   b) $\alpha = \frac{1}{2}$.
   c) $\alpha = 1$.
   d) Keine Aussage möglich.

c), denn wenn $x \to \infty$ muss gelten, dass $F(x) \to 1$. Das ist nur mit $\alpha = 1$ möglich.

8) Wir testen mit einem Binomialtest auf dem Signifikanzniveau 0.05 ob eine Münze gefälscht wurde so dass sie häufiger Kopf zeigt ($H_0 : \pi = 0.5$, $H_A : \pi > 0.5$). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Münze als gefälscht bezeichnen (H_0 wird verworfen), wenn sie in Wahrheit fair (H_0 ist richtig) ist?

   a) Mindestens 0.05.
   b) Mindestens 0.95.
   c) Höchstens 0.05.
   d) Höchstens 0.95.

c). Definition des Signifikanzniveaus.

9) Es gilt für ein Ereignis E, dass $\mathrm{odds}(E) = 4$. Was ist die Wahrscheinlichkeit für E?

   a) 0.2.
   b) 0.4
   c) 0.6.
   d) 0.8.

d), denn $P(E) = \mathrm{odds}(E)/(1 + \mathrm{odds}(E))$.

10) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person die Krankheit K hat sei $P(K) = 0.01$. Für diese Krankheit wurde ein Test T entwickelt. Eine kranke Person wird mit Wahrscheinlichkeit $P(T|K) = 0.9$ positiv getestet, eine gesunde Person mit Wahrscheinlichkeit $P(T|K^C) = 0.1$. Nun wird eine zufällig gewählte Person positiv getestet. Wie gross ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass die Person krank ist?

   a) 0.0041.
   b) 0.041.
   c) 0.0083.
   d) 0.083.

d), denn $P(K|T) = P(T|K)P(K)/(P(T|K)P(K) + P(T|K^C)P(K^C))$