Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** Gepaart. Jedem Produkt aus dem einen Laden kann genau ein Produkt aus dem anderen Laden zugeordnet werden. **(1 Punkt)**

b) Man nimmt an, dass die Differenzen unabhängig normalverteilt mit Parameter μ und σ^2 sind. **(1 Punkt)**
Mit dem Q-Q Plot. **(1 Punkt)**

c) $H_0 : \mu = 0, H_A : \mu \neq 0$. **(1 Punkt)**

d)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = 1.5 \qquad (1)$$

wobei $\bar{D} = -0.5$ und $n = 6$. **(1 Punkt)**

e)
1. **Modell:** $D_1, \ldots, D_6$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$
2. **Nullhypothese:** $H_0 : \ \mu = 0$,
   Alternative: $H_A : \ \mu \neq 0$
3. **Teststatistik:**

$$\begin{aligned} T = & \ \frac{\sqrt{n}(\bar{D} - \mu_0)}{\widehat{\sigma_X}} \\ = & \ \frac{\sqrt{6}(-0.5)}{1.5} \\ = & \ -1 \end{aligned}$$

   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim \ t_{n-1}$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.1$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{aligned} K = & \ (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \\ = & \ (-\infty, -2.015] \cup [2.015, \infty) \end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt nicht im Verwerfungsbereich. Also wird die Nullhypothese beibehalten.**(2 Punkte)**

f)

$$\begin{aligned} I &= [\bar{d} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.95}, \bar{d} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.95}] \\ &= [-0.5 - \frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{6}} * 2.015, -0.5 + \frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{6}} * 2.015] \qquad (2) \\ &= [-1.508, 0.508] \ \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

2. (8 Punkte)

a) X: Anzahl Patienten, die an TRALI erkranken; $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ **(0.5 P)** mit $n = 30000$ und $\pi = 1/55000 = 1.82 \cdot 10^{-05}$ **(0.5 P)**

b) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ **(0.5 P)** mit $\lambda = \frac{30000}{55000} = 0.545$ **(0.5 P)**.
Begründung: seltenes Ereignis (Erkrankung an TRALI) **(0.5 P)** bei vielen unabhängigen "Versuchen" (Bluttransfusionen) **(0.5 P)**.
(Falls Antwort "Normalapproximation": insgesamt **0.5 P** für richtige Parameter $\mu = n\pi = \frac{30000}{55000} = 0.545$, $\sigma^2 = n\pi(1-\pi) = 0.545$.)

c) In beiden Fällen kann die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet werden:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \quad \textbf{(1 P)}$$

Unter Binomialverteilung:

$$P(X \geq 2) = 1 - (1-\pi)^n - n\pi(1-\pi)^{n-1} = 0.1043 \ \textbf{(1 P)}$$

Unter Poisson-Verteilung:

$$P(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 0.1043 \ \textbf{(1 P)}$$

(Unter Normalapproximation:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &\approx 1 - P(X \leq 1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) \ \textbf{(1 P)} \\ &= 1 - \Phi(0.615) = 0.2691 \ \textbf{(1 P)}) \end{aligned}$$

d) Maximum likelihood-Schätzer: $\hat{\pi} = \frac{\sum_{i=1}^{6} k_i}{\sum_{i=1}^{6} n_i}$ **(1 P)** $= 3.92 \cdot 10^{-05}$ (d.h., TRALI tritt im Mittel nach einer von 25500 Bluttransfusionen auf) **(1 P)**

3. (10 Punkte)

a) $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ **(0.5 P)** mit $n = 10$ und $\pi = \frac{1}{6}$ **(0.5 P)**.

b) Durch Aufsummieren der Binomialverteilung findet man:

$$\begin{aligned} p &= P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X = k) \ \textbf{(0.5 P)} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \\ &= 0.2248 \quad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

c) $P(T = k) = (1-p)^{k-1} p$ **(1 P)**

d) Gemäss Definition des Erwartungswerts gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(T) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} \\ &= p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} = 4.449 \ . \end{aligned}$$

Im Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wird die in der Aufgabenstellung angegebene Formel mit $q = 1 - p$ verwendet. **(1.5 P)** *fürs korrekte Umformen,* **(0.5 P)** *für korrekten Wert*

e) Normalapproximation: $Y \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ **(0.5 P)** mit $\mu_0 = \pi \cdot 480 = 80$ **(0.5 P)** und $\sigma_0^2 = 480 \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 66.67$ **(1 P)**.

f)
1. **Modell**: Y: Anzahl Spitzen in 480 Spargelstücken; $Y \sim \text{Binomial}(n', \pi)$
2. **Nullhypothese** $H_0 : \pi = \frac{1}{6}$;
   Alternativhypothese $H_A : \pi < \frac{1}{6}$.
   Es wird also einseitig getestet **(1 P)**
3. **Teststatistik:** $Z = \dfrac{Y - \mu_0}{\sigma_0}$ **(0.5 P)**
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $Z \approx \mathcal{N}(0, 1)$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:**
   $K = (-\infty, \Phi^{-1}(\alpha)] = (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\alpha)] = (-\infty, -1.64]$ **(0.5 P)**
6. **Testentscheid:** $Z = -0.98$ **(0.5 P)**, also $Z \notin K$, daher wird die Nullhypothese *nicht* verworfen zugunsten der Alternativhypothese, dass das Personal Spargelspitzen nascht. **(0.5 P)**

(Sinngemässe Punktzahlen auch für andere Lösungswege.)

4. Je einen Punkt für:

1) f
2) e
3) c
4) c
5) a
6) c
7) c
8) b

5. (8 Punkte)

1) b) $(\Phi(-\frac{3}{2}))$
2) c) $(a < 2.45, b > 2.45)$
3) d) (9)
4) a) (unkorreliert)
5) c) (0.3456)
6) d) (0.0657)
7) f) (keinen der genannten Werte, sondern $\frac{2}{3}$)
8) a) $(\mu < \mathcal{E}(X))$