Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** Gepaart. **(0.5 P)** Jeder Stern wird jeweils mit dem neuen und dem traditionellen Verfahren vermessen. **(0.5 P)**

b) $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ **(1P)**

c) Der Verwerfungsbereich ist

$$K = \left(-\infty, -\frac{t_{9,97.5\%}0.46}{\sqrt{10}}\right) \cup \left(\frac{t_{9,97.5\%}0.46}{\sqrt{10}}, \infty\right) = (-\infty, -0.3290) \cup (0.3290, \infty).$$

(2 P) *wenn K komplett richtig, für jeden falschen Eintrag im Endresultat einen Punkt Abzug (minimal 0 Punkte).*

Da $-0.21 \notin K$, wird H_0 beibehalten. **(1 P)**

d) $\left[-0.21 - \frac{t_{9,97.5\%} \cdot 0.46}{\sqrt{10}}, -0.21 + \frac{t_{9,97.5\%} \cdot 0.46}{\sqrt{10}}\right] = [-0.5390, 0.1190]$ **(2P)** *Für jeden falschen Eintrag im Endresultat einen Punkt Abzug.*

e) Nein, denn die Standartabweichung ist nicht bekannt. **(1P)**

2. **a)** **(1 Punkt)** Man hat ein seltenes Ereignis (Klagen) bei vielen unabhängigen Versuchen (mehrere Restaurants).

b) **(1 Punkte)** Die Wahrscheinlichkeit von n Klagen in einen Jahr ist gegeben durch:

$$Poi_{\lambda}(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \ ,$$

wobei λ die zu erwartende Anzahl von Klage ist. Deswegen wählen wir:

$$\lambda := \hat{\lambda} = (0 \cdot 54 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0)/60 = \frac{7}{60}$$

c) **(1 Punkt)** Wir benutzen in diesem Fall die Komplementar-Wahrscheinlichkeit:

$$P[\#Klagen \geq 1] = 1 - P[keine\ Klage] = 1 - e^{-\frac{7}{60}} \cong 0.11 = 11\%$$

d) **(1 Punkt)** Man erwartet $\lambda = \frac{7}{60} \cong 0.1667$ Klagen. Die Kosten betragen deswegen $500'000\$ \cdot \frac{7}{60} \cong 58'333.33\$$.

e) **(2 Punkte)** Man erwartet $\mu = 24'000 \cdot \frac{7}{60} = 2800$ Kalgen. (Da μ der Erwartungswert der Verteilung ist, wählen wir für μ der Anzahl erwartete Klagen).

f) **(3 Punkte)** Sei K = #Klagen. Die Versicherung verliert Geld, wenn:

$$K \cdot 500'000 > 24'000 \cdot 61'500\$$$

Also (beim auflösen) wenn $K > 2952$. (1Pt)

$$\begin{aligned}
P[K > 2952] &= 1 - P[K \leq 2952] && (1Pt) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{2952 - 2800}{\sqrt{2800}}\right) \\
&= 1 - \Phi(2.8725) \\
&= 1 - 0.9979 = 0.21\% && (1Pt)
\end{aligned}$$

[Berechnungen mit $P[K \geq 2953]$ sind auch akzeptiert.]

Punktverteilung: a) 1 Pt, b) 1 Pt, c) 1 Pt, d) 1 Pt, e) 2 Pt, f) 3 Pt.

3. **a) (1 Punkt)** Wir benutzen folgende Notation: $R = Reise$; $A = Absage$.

$$P[3R\ 1A] = \binom{4}{3} \cdot 0.9^3 \cdot 0.1^1 = 0.2916 = 29.16\%$$

b) (1.5 Punkte) S_n sei der Anzahl Personen, die den Flug nehmen möchten. S_n ist binomialverteilt. Mit 28 Passagiere haben wir:

$$\begin{aligned} S_{28} &\sim Bin(28, 0.9) && (0.5Pt) \\ \mathbf{E}[S_{28}] &= 28 \cdot 0.9 = 25.2 && (0.5Pt) \\ \mathrm{Var}(S_{28}) &= 28 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 2.52 && (0.5Pt) \end{aligned}$$

c) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} P[\text{Zu viele Leute}] &= P[k = 27] + P[k = 28] && (0.5Pt) \\ &= \binom{28}{27} \cdot 0.9^{27} \cdot 0.1^1 + \binom{28}{28} \cdot 0.9^{28} \cdot 0.1^0 \\ &= 0.1628 + 0.05233 = 0.215154 = 21.52\% && (0.5Pt) \end{aligned}$$

d) (1.5 Punkte) Mit einer Normalverteilung (0.5Pt),

$$\begin{aligned} & S_n \sim \mathcal{N}(np, npq) \\ \Rightarrow\ & S_{890} \sim \mathcal{N}(801, 80.1) && (0.5Pt\ ,\ 0.5Pt) \end{aligned}$$

e) (2.5 Punkte) Aus der Tabelle der Gaussverteilung: $\Phi^{-1}(0.95) = 1.645$ (0.5Pt), daraus folgt:

$$\begin{aligned} & P[S_n < 853] = 0.95 && (0.5Pt) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{853 - n \cdot 0.9}{\sqrt{n \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = 1.645 && (1Pt) \end{aligned}$$

Beim Lösen dieser einfachen Gleichung 2. Grad erhält man $n = 931.046$. Man sollte also höchstens 931 Buchungen akzeptieren. (0.5Pt)

f) (3 Punkte) Normalapproximation $\mathcal{N}(801, 80.1)$ (0.5Pt)

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 801 \\ H_1 &: \mu \neq 801 && (0.5Pt) \end{aligned}$$

2 seitiger Z-Test auf 5% Niveau: Verwerfe Nullhypothese falls

$$|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \qquad (0.5Pt)$$

wobei

$$u = \frac{875 - 801}{\sqrt{80.1}} = 8.2683 \qquad (1Pt)$$

Die Nullhypohese wird deutlich verworfen. (0.5Pt)

g) (1.5 Punkte) Nein! (0.5Pt) Ein Test kann eine Nullhypothese ausschliesslich falsifizieren, nicht aber verifizieren. Wenn eine Nullhypothese akzeptiert wird, bedeutet dies noch NICHT, dass sie stimmt! (1Pt)

Punktverteilung: a) 1 Pt, b) 1.5 Pt, c) 1 Pt, d) 1.5 Pt, e) 2.5 Pt, f) 3 Pt g) 1.5

4. Je einen Punkt für:

1) d (94)
2) a (0.075)
3) a (0.643)
4) b (Nein)
5) c ($0.468 \pm 1.987 * 0.181$)
6) c (k.A.m.)
7) c (k.A.m.)
8) b (Ausreisser)

5. Je einen Punkt für:

1) c (3)
2) c (17)
3) c ($\frac{2}{3}x\exp(-\frac{1}{3}x^2...)$
4) a ($\sqrt{3\ln 2}$)
5) a (Poisson)
6) f (Exponential)
7) d ($N(1600, 1600)$)
8) b ($H_A : \mu > \mu_0$)