Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** **(1P)** ungepaart (0.5 P); Bücher werden in jeder Buchhandlung zufällig ausgewählt. Die beiden Stichproben sind also unabhängig von einander (0.5 P).

b) **(1P)** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ (0.5 P), $H_A : \mu_X > \mu_Y$ (0.5 P)

c) **(2.5P)**

- $T \overbrace{=}^{0.5P} \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{s_{pool}} \sqrt{\frac{1}{1/n_1+1/n_2}} = \frac{18-15.2}{3.450} \sqrt{\frac{1}{1/15+1/15}} \overbrace{=}^{0.5P} 2.223$
- verwerfe H_0 falls: $T > t_{1-5\%,28}$ (0.5P)
- $t_{1-5\%,28} = 1.701$ (0.5P)
- also wird H_0 verworfen (0.5P)

d) **(2P)** $[\bar{X} - \bar{Y} - 1.701 * s_{pool} * \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}, +\infty) = [0.657, +\infty)$ (1P+1P)

e) **(1P)** gepaart (0.5 P); in jeder Buchhandlung werden diesselben Bücher ausgewählt (0.5 P)

f) **(1P)** Kenngrössen: $\bar{X} - \bar{Y}$, $\hat{\sigma}_{X-Y}$ (0.5 P)
Teststatistik: $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\bar{Y})}{\hat{\sigma}_{X-Y}}$ (0.5 P)

2. a) (1 Punkt)

- S_n: Anzahl Flaschen mit Defekt.
- $p = 0.1$: Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche einen Mangel aufweist.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[\text{die ersten drei Flaschen haben einen Mangel}\right] &= p^3(1-p)^2 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ &= 0.00081 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

b) (1 Punkt)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[S_5 = 3\right] &= \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ &= 10 * 0.00081 = 0.0081 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

c) (2 Punkte)

$$\begin{aligned} S_{150} &\sim \mathrm{Bin}\left(150, 0.1\right) \qquad \textbf{(1 P)} \\ \mathbf{E}\left[S_{150}\right] &= 150 \cdot 0.1 = 15 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ \mathrm{Var}\left(S_{150}\right) &= 150 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 13.5 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

d) (2 Punkte)

Normalapproximation (i.o. da $150 * 0.1 * 0.9 = 13.5 > 9$):

$$\begin{aligned} S_{150} &\sim \mathcal{N}\left(15, 13.5\right) \\ \mathrm{P}\left[15 \le S_{150} \le 20\right] &= \mathrm{P}\left[0 \le Z \le \frac{20-15}{\sqrt{13.5}}\right] \qquad \textbf{(1 P)} \\ &= \mathrm{P}\left[Z \le 1.36\right] - 0.5 \qquad \textbf{(0.5 P)} \\ &= 0.9131 - 0.5 = 0.4131 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

e) (3 Punkte)

- Normalapproximation: $S_{150} \sim \mathcal{N}\left(15, 13.5\right)$ **(0.5 P)**
- Nullhypothese vs. Alterntivhypothese

$$\begin{aligned} H_0 &: \; p = 0.1 \\ H_1 &: \; p \neq 0.1 \qquad \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

- 2 seitiger Z-Test auf 5% Niveau: Verwerfe Nullhypothese falls

$$|u| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \qquad \textbf{(0.5 P)}$$

  wobei

$$u = \frac{20-15}{\sqrt{13.5}} \qquad \textbf{(1 P)}$$

- Testentscheid: H_0 wird nicht verworfen, da $u = 1.36 < 1.96$. **(0.5 P)**

3. **a)** (1 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde unzufrieden mit der Beratung ist entspricht der Summe:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[\text{unzufrieden mit Beratung von Frau Alleskönnerin}\right] \\
&+ \mathrm{P}\left[\text{unzufrieden mit Beratung von Herr Besserwisser}\right] \\
&+ \mathrm{P}\left[\text{unzufrieden mit Beratung von Frau Chancenlos}\right] \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0.05 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 + \frac{1}{3} \cdot 0.3 = 0.15
\end{aligned}
$$

b) (2 Punkte) Wenn wir wissen, dass ein Kunde nicht von Frau Alleskönner bedient wird beträgt die Wahrscheinlichkeit für diesen Kunden von einem der beiden andern Mitarbeiter bedient zu werden $\frac{1}{2}$. Das heisst, wir erhalten:

$$\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.7 = 0.8$$

c) (2 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen aus:

$$0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.0015$$

d) (3 Punkte) Die Wahrscheinlichkeit setzt sich zusammen aus:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left[AB\right] + \mathrm{P}\left[BA\right] + \mathrm{P}\left[AC\right] + \mathrm{P}\left[CA\right] + \mathrm{P}\left[BC\right] + \mathrm{P}\left[CB\right] \\
&= \frac{1}{3} \cdot 0.05 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.95 + \frac{1}{3} \cdot 0.05 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.7 + \frac{1}{3} \cdot 0.3 \\
&\cdot \frac{1}{2} \cdot 0.95 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.7 + \frac{1}{3} \cdot 0.03 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.9 \\
&= 0.13333...
\end{aligned}
$$

4.
1) d
2) a
3) c
4) a
5) d
6) c
7) a
8) d
9) b

5.

1) a) $\mathbf{E}[X] = 2$, $\mathbf{E}[Y] = 4$, $\mathbf{E}[6] = 6$. $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X] + 2 \cdot \mathbf{E}[Y] - \mathbf{E}[6]$.
2) c) $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Var}(6) = 0$. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + 2^2 \cdot \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(6) = 9 + 4 * 4 + 0$.
3) b) The margin of error ME equals 1/2 the length of the confidence interval. $ME = z^* \sigma/\sqrt{n} = 1.96 * 5/\sqrt{n}$. Solve for n.
4) d) Properties of Poisson Distribution.
5) b) An increase in the level of significance is associated with an increase in the Power.
6) b) Integrate the pdf $\mathrm{Exp}(1/500)$.
7) d) Set $F(x) = 0.5$ and solve for x.
8) d)
9) b) The Sum of n Bernouilli(p) variables equals a $\mathrm{Bin}(n, p)$ variable.
10) a) The data is not normally distributed, so we should use the Wilcoxon Test. The P-value is less than 0.05, and so we reject the null hypothesis.