Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** **(Total 1 Punkt)**
Ein Brötchen der Bäckerei X kann nicht einem Brötchen der Bäckerei Y zugeordnet werden. **(1 Punkt)**

b) **(Total 2 Punkte)**
$H_0 : \mu_X = \mu_Y$ **(1 Punkt)**
$H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ **(1 Punkt)**

c) **(Total 2 Punkte)**

$$\begin{aligned} S_{pool}^2 &= \left(\frac{1}{n+m-2}\right)\left((n-1)\hat{\sigma}_x^2 + (m-1)\hat{\sigma}_y^2\right) \\ &= \frac{1}{18}(9 \cdot 8.46^2 + 9 \cdot 6^2) \\ &= 53.79. \end{aligned}$$

Also ist $S_{pool} = \sqrt{53.79} = 7.33$.

d) **(Total 3 Punkte)**

- Teststatistik

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_{pool}\sqrt{1/n + 1/m}} \\ &= \frac{36.24 - 41.88}{7.33\sqrt{2/10}} \\ &= -1.72. \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

  Mit Ersatzresultat: $T = -1.80$.

- Verwerfungsbereich

$$\begin{aligned} K &= \{T\,;\, |T| > t_{18,0.975}\} \\ &= \{T\,;\, |T| > 2.101\} \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

- Testentscheid: Die Nullhypothese kann *nicht* verworfen werden. **(1 Punkt)**

e) **(Total 2 Punkte)**
Der p-Wert ist grösser als 5%, da die Nullhypothese nicht verworfen werden konnte. **(2 Punkte)**

2.
- S_n: Anzahl an Durchfall erkrankter Personen
- $p = 0.3$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Urlauber an Durchfall erkrankt

a) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
S_{10} &\sim \mathrm{Bin}(10, 0.3) \qquad \textbf{(1 P)} \\
\mathrm{P}[S_{10} = 0] &= 1 \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{10} \\
&= 0.028 \qquad \textbf{(1 P)} \\
\textbf{oder: } \mathrm{P}[S_{10} = 0] &= \mathrm{P}[X_1 = 0, \ldots, X_{10} = 0] \\
&= 0.7^{10} \qquad \textbf{(2 P)}
\end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Normalapproximation:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_{300}] &= 300 \cdot 0.3 = 90 \qquad \textbf{(1 P)} \\
\mathrm{Var}(S_{300}) &= 300 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 63 \qquad \textbf{(1 P)} \\
S_{300} &\sim \mathcal{N}(90, 63)
\end{aligned}$$

c) (2 Punkte) Normalapproximation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[S_{300} > 110] &= 1 - \mathrm{P}[S_{300} < 110] \qquad \textbf{(0.5 P)} \\
&= 1 - \mathrm{P}\left[\frac{S_{300} - 90}{\sqrt{63}} < 2.52\right] \qquad \textbf{(1 P)} \\
&= 0.006 \qquad \textbf{(0.5 P)}
\end{aligned}$$

d) (2 Punkte)

$$\begin{aligned}
H_0 &: p = 0.3 \\
H_1 &: p > 0.3 \qquad \textbf{(0.5 P)}
\end{aligned}$$

- Test auf 5% Niveau: Verwerfe Nullhypothese falls $S_{300} > 103$ **(0.5 P)**
- Verwerfungsbereich: $[\mathbf{E}[S_{300}] + 1.65 * \sqrt{\mathrm{Var}(S_{300})}, \infty) = [103.1, \infty)$ **(0.5 P)**
- Testentscheid: H_0 kann nicht verworfen werden, da $100 < 103$. **(0.5 P)**

e) (2 Punkte)

Approximation durch Poisson-Verteilung:

$$\begin{aligned}
S_{10} &\sim \mathrm{Pois}(np) = \mathrm{Pois}(3) \qquad \textbf{(1 P)} \\
\mathrm{P}[S_{10} = 0] &= \exp(-3) = 0.05 \qquad \textbf{(0.5 P)}
\end{aligned}$$

Die Voraussetzungen für eine Poisson-Approximation sind nicht gegeben. Diese gilt nur für grosses n und kleines p. **(0.5 P)**

3. Bezeichne die Anzahl Stimmen (in Tausend) für die Parteien A, B und C mit N_A, N_B respektive N_C.

a) **(2 Punkte)** Es ist $P(N_B > N_C) = P(N_B - N_C > 0)$, wo $N_B - N_C$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 6 und Varianz 97 **(1P)**. Somit ist

$$P(N_B > N_C) = \Phi(\frac{6}{\sqrt{97}}) = 72.9\% \quad \textbf{(1P)}$$

b) **(3 Punkte)**
Es ist

$$P(N_A + N_C > N_B) = P(N_A + N_C > 100 - N_A - N_C) = P(N_A + N_C > 50) \quad \textbf{(1P)}\ ,$$

wo $N_A + N_C$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 52 und Varianz 90 **(1P)**. Also ist $P(N_A + N_C > N_B) = \Phi(\frac{52-50}{\sqrt{90}}) = 58.3\%$ **(1P)**.

c) **(5 Punkte)** Bezeichne mit W_{Block} die Partei, den der Block der Unentschlossenen wählt. Wir können dann drei Fälle unterscheiden **(1P)**:

- $W_{Block} = A$. Hier ist $P(W_{Block} = A \text{ und } N_B > N_C) = 1/3 \cdot 72.9\% = 24.3\%$ wie in Aufgabe a), da die Stimmenzahlen der Parteien B und C unverändert bleiben. **(1P)**
- $W_{Block} = B$. Hier erhöht sich die Stimmenzahl von Partei B um 3000; der Erwartungswert von $N_B - N_C$ (in Tausenden gemessen) wird nun zu 9, und somit ist

$$P(W_{Block} = B \text{ und } N_B > N_C) = 1/3 \cdot \Phi(\frac{9}{\sqrt{97}}) = 27.3\% \quad \textbf{(1P)}$$

- $W_{Block} = C$. Hier erhöht sich die Stimmenzahl von Partei C um 3000; der Erwartungswert von $N_B - N_C$ (in Tausenden gemessen) sinkt auf 3, und somit ist

$$P(W_{Block} = C \text{ und } N_B > N_C) = 1/3 \cdot \Phi(\frac{3}{\sqrt{97}}) = 20.7\% \quad \textbf{(1P)}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} P(N_B > N_C) &= P(W_{Block} = A \text{ und } N_B > N_C) + P(W_{Block} = B \text{ und } N_B > N_C) \\ &\quad + P(W_{Block} = C \text{ und } N_B > N_C) \\ &= 72.3\% \quad \textbf{(1P)}\ . \end{aligned}$$

4.
1. e).
2. f).
3. a).
4. a).
5. c).
6. c).
7. b).

5. 1) e)

2) $\operatorname{Var}(X-2Y+3) = \operatorname{Var}(X) + 4\operatorname{Var}(Y) = 10+4 = 14$, also e).

3) $\mathbf{E}[X^2] = \operatorname{Var}(X) + \mathbf{E}[X]^2 = 10 + 2^2 = 14$, also e).

4) $f(x) = F'(x) = 5x^4$, also f).

5) $\mathbf{E}[X] = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 5x^5 dx = \left[\frac{5}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{5}{6}$, also c).

6) a) $\mathrm{P}[F(X) \leq y] = \mathrm{P}[X^5 \leq y] = \mathrm{P}\left[X \leq y^{\frac{1}{5}}\right] = (y^{\frac{1}{5}})^5 = y$, also a).

7) Summen von i.i.d Zufallsvariablen sind nach dem Zentralen Grenzwertsatz normalverteilt und
$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{200} X_i\right] = \sum_{i=1}^{200} \mathbf{E}[X_i] = 200 \cdot \frac{(13+1)}{2} = 1400$ bzw.
$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i\right) = \sum_{i=1}^{200} \operatorname{Var}(X_i) = 200 \cdot \frac{(13-1)^2}{12} = 2400$,
also a).

8) b) Da die Dichte der $\mathcal{N}(1400, 200)$-Verteilung spiegelsymmetrisch bezüglich der vertikalen Achse mit Abszissenwert 1400 ist, ist b) richtig.

9) Da $X_1 + X_2 \sim \text{Binomial}(2, \frac{2}{3})$ ist, gilt $\mathrm{P}[X_1 + X_2 = 1] = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, also e).

10) $\mathrm{P}[X_1 = X_2] = \mathrm{P}[X_1 = X_2 = 0] + \mathrm{P}[X_1 = X_2 = 1] =$
$\mathrm{P}[X_1 = 0]\,\mathrm{P}[X_2 = 0] + \mathrm{P}[X_1 = 1]\,\mathrm{P}[X_2 = 1] = \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{5}{9}$, also d).