2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1. a) Sei X die Anzahl Fuechse mit Tollwut unter 18 zufaellig eingefangenene Fuechsen. Dann ist X binomial verteilt $B(n, p)$ mit $n = 18$ und $p = 1/3$. Daher

$$E(X) = np = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$$

und fuer die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

b) Die Wahrscheinlichkeit unter n mindestens einen gesunden Fuchs zu haben, ist gleich 1 minus der Wahrscheinlichkeit unter n Fuechsen nur kranke Tiere zu haben. Wenn n die Mindestanzahl Fuechse ist, so dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen gesundes Tier zu haben groesser als 90% ist, dann

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0.9 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0.1 \Rightarrow n = 3.$$

c) Sei $\hat{p}$ der geschaetzte Anteil Fuechse mit Tollwut in der Population. Das Vertrauensintervall ist gegeben durch

$$\left[\hat{p} - \frac{1.96}{n}\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}, \hat{p} + \frac{1.96}{n}\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})}\right].$$

und daher mit $\hat{p} = X/n = 0.2$ und $n = 100$ durch

$$[0.2 - 1.96 \cdot 4/100, 0.2 + 1.96 \cdot 4/100] = [0.1216, 0.2784]$$

2. a) Beobachtung $X = 1$.
Nullhypothese H_0: $\lambda = 6$.
Alternativhypothese H_1: $\lambda < 6$.
p-Wert:

$$P_{\lambda=6}(X \leq 1) = (\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!}) \exp(-\lambda) = 7 \exp(-6) \approx 7 \cdot 0.0025 = 0.0175.$$

Die Nullhypothese kann auf dem 5%-Niveau verworfen werden.

b) Fuer X Poisson-verteilt gilt $E(X) = \lambda$ und $\mathrm{Var}(X) = \lambda$. Daher ist der Erwartungswert der eingehenden Bestellungen fuer Firma B gleich der Varianz, naemlich 100.

c) Die Summe von n unabhaengigen Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ ist wieder Poisson-verteilt mit Parameter $n\lambda$. Daher ist die exakte Verteilung fuer die Eingaenge in 100 Werktagen eine Possionverteilung mit Parameter $\lambda = 10000$. Eine Approximation ist gegeben durch die Normalverteilung mit identischem Erwartungswert und Varianz, d.h. durch $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 10000$ und $\sigma = 100$.

d) Die Wahrscheinlichkeit mehr als 10200 Bestellungen zu erhalten ist approximativ gegeben durch

$$P(Y > 10200) = 1 - P(Y \leq 10200) = 1 - \Phi(200/\sigma) = 1 - \Phi(2) \approx 0.023.$$

3. **a)** Gepaart denn man soll Paare von Typ $(A_i, N_i), i = 1, \ldots, n = 10$ betrachten.

b) Der t-Test wird folgendermassen formal durchgeführt:

Modellannahme	:	D_i: $i-$te Differenz, $i = 1, \ldots, 10$. D_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit σ unbekannt.
Nullhypothese H_0	:	$\mu = \mu_0 = 0$
Alternative H_A	:	$\mu < 0$ (einseitig)
Wert der Teststatistik	:	$T = \frac{\overline{D}-\mu_0}{s_D/\sqrt{n}} = \sqrt{10} \cdot (-4)/19.80 = -0.6388$
Verwerfungsbereich	:	V.B. $= \{T < t_{n-1,\alpha} = t_{9,0.05} = -1.833\}$.
Testentscheid	:	$T = -0.6388 \notin$ V.B.: die Nulhypothese wird beibehalten.

c) X sei die Anzahl positive Differenzen D_i. X ist $\text{Bin}(n = 10, p)$.
Vorzeichentest:

Nullhypothese H_0	:	$p = p_0 = 0.5$
Alternative H_A	:	$p < 0.5$ (einseitig)
p-Wert	=	$\text{P}[X \leq 1] = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \cdot p_0^k \cdot (1-p_0)^{n-k}$ $= \binom{10}{0} \cdot 0.5^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.5^{10} = 0.5^{10} \cdot (1+10)$ $= 11 \cdot 0.00098 = 0.01$
Testentscheid	:	da der p-Wert kleiner als 5% ist, kann man die H_0 verwerfen. Es ist statistisch gesichert, dass der neue Computer schneller als der alte ist.

d) Da der p-Wert kleiner als 5% ist, kann man gemäss den Wilcoxon-Test die H_0 verwerfen. Es ist statistisch gesichert, dass der neue Computer schneller als der alte ist.

e) Man sieht, dass die 7^{te} Beobachtung weit weg von den anderen ist (Ausreisser). Man soll den Wilcoxon-Test vorziehen, denn er weniger empflindlich auf Ausreisser ist.

4. 1) e)
2) a)
3) b)
4) d)
5) b)
6) c)
7) e)
8) f)
9) b)
10 b)

5. 1) c)
2) c)
3) d)
4) b)
5) c)
6) d)
7) a)