

2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1. a) X: Anzahl erfolgreich reparierter Reifen.

$$E[X] = n \cdot p = 10 \cdot 0.75 = 7.5.$$

- b)

$$\hat{p} = 73/100 = 0.73.$$

- c) Normalapproximation.

$$E[X] = np = 75, \quad \text{Var}[X] = np(1-p) = 100 \cdot 0.75 \cdot 0.25 = \frac{300}{16}.$$

Also

$$\begin{aligned} P[X \leq 73] &= \Phi\left(\frac{73 - E[X]}{\sqrt{\text{Var}[X]}}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{300}{16}}}\right) \cong \Phi(2 \cdot 0.23) \\ &= \Phi(-0.46) = 1 - 0.6772 \cong 0.32 \end{aligned}$$

- d)
- $H_0: p = 0.75$

$$H_A: p < 0.75$$

Der p-Wert beträgt 0.32 und die Nullhypothese wird beibehalten.

- e) Vertrauensintervall:

$$\begin{aligned} &[\hat{p} - 1.96 \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) \cdot n/n}, \hat{p} + 1.96 \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) \cdot n/n}] \\ &\cong [0.73 - 1.96 \cdot \sqrt{0.73 \cdot 0.27 \cdot 100/100}, 0.73 + 1.96 \cdot \sqrt{0.73 \cdot 0.27 \cdot 100/100}] \\ &\cong [0.643, 0.817] \end{aligned}$$

2. 1) b)

- 2) c)

- 3) a)

- 4) b)

- 5) b)

- 6) a)

- 7) b)

3. 1) e)

- 2) c)

- 3) a)

- 4) d)

- 5) a)

6) c)

7) c)

4. a)

$$E[X] = a \cdot E[X_1] + b \cdot E[X_2] = (a + b) \cdot \mu.$$

$$E[X] = \mu \Leftrightarrow a + b = 1$$

b)

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[aX_1] + \text{Var}[bX_2] = a^2\text{Var}[X_1] + b^2\text{Var}[X_2] = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$$

c)

$$E[X] = \mu \Leftrightarrow a + b = 1$$

Also z.B. $b = 1 - a$ und $\text{Var}[X] = a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2$.

$$\text{Var}[X] \text{ minimal} \quad \Leftrightarrow \frac{d}{da}(a^2\sigma_1^2 + (1 - a)^2\sigma_2^2) = 0$$

Die Bedingung ist äquivalent zu

$$2a\sigma_1^2 + 2a\sigma_2^2 - 2\sigma_2^2 = 0$$

und daher

$$a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

und

$$b = 1 - a = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

5. 1) b)

2) c)

3) a)

4) b)

5) d)

6) c)

7) c)