2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1. Sei X die Anzahl ausgefallener Apperate, $X \sim \mathrm{Bin}(n = 100, \pi)$.

a) $\mathrm{P}[X = 99] = 100 \cdot 0.1^{99} \cdot 0.9 = 9 \cdot 10^{-98}$

b) $\mathbf{E}[X] = 100 \cdot 0.1 = 10, \mathrm{Var}(X) = 100 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 9$
Also approximieren wir durch eine $\mathcal{N}(10, 3^2)$-Verteilung.
$\mathrm{P}[X \leq 7] \approx \Phi((7-10)/3) = \Phi(-1) \approx 0.16$
PS:

- mit Stetigkeitskorrektur: $\mathrm{P}[X \leq 7] = \mathrm{P}[X \leq 7.5] \approx \Phi(-0.833) \approx 0.20$
- exakt: $\mathrm{P}[X \leq 7] = 0.206$.

c) $H_0 : \pi = 0.1$, $H_A : \pi < 0.1$ (einseitig)
Wert der Teststatistik: 7
p-Wert: 0.16 (aus Teil b) oder Verwerfungsbereich via Normalapproximation: $[0, 10 - 1.64 \cdot 3] = \{0, \ldots, 5\}$ (exakt: $\{0, \ldots, 4\}$).
Testentscheid: H_0 beibehalten. Der Hersteller kann seine Aussage nicht beweisen.

2. **a)** $\overline{y} \pm t_{8,0.975} \cdot \frac{s_y}{\sqrt{9}} = 60.33 \pm 2.306 \cdot \sqrt{226}/3 = [48.78, 71.89]$

b) $H_0 : \mu_x = \mu_y$, $H_A : \mu_x < \mu_y$ (einseitig)
Teststatistik: $t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_{\overline{x}-\overline{y}}}$ mit
$s_{\overline{x}-\overline{y}} = s_{pool}\sqrt{1/9 + 1/9} = \sqrt{(298 + 226)/2} \cdot \sqrt{1/9 + 1/9} = 7.63$, also
$t = -11/7.63 = -1.44$.
Verwerfungsbereich: $K =]-\infty, -t_{16,0.95}] =]-\infty, -1.746]$.
Testentscheid: H_0 beibehalten.

c) $0.035 < 0.05$, also verwirft der Wilcoxon-Test H_0. Es lässt sich zeigen, dass der neue Dünger zu grösseren Pflanzen führt.

d) Die Stichprobe der mit dem alten Dünger behandelten Pflanzen hat einen klaren Ausreisser nach oben (die Beobachtung 92). Die Normalverteilungsannahme ist nicht gerechtfertigt. Der Wilcoxon-Test ist deshalb vorzuziehen.

3. **a)** $\mathrm{P}[X = 1] = \mathrm{P}[X = 2] = \mathrm{P}[X = 3] = 1/5$ und $\mathrm{P}[X = 4] = 2/5$ (tritt ein, falls das Leck in Segement 4 oder 5 ist).
$\mathbf{E}[X] = (1 + 2 + 3) \cdot 1/5 + 4 \cdot 2/5 = 2.8$
$\mathbf{E}[X^2] = (1^2 + 2^2 + 3^2) \cdot 1/5 + 4^2 \cdot 2/5 = 9.2 \rightarrow \mathrm{Var}(X) = 9.2 - 2.8^2 = 34/25 = 1.36$.

b) $Y = 2$, falls das Leck in den Segmenten 1-3 ist, sonst $Y = 3$.
$\mathrm{P}[Y = 2] = 3/5$, $\mathrm{P}[Y = 3] = 2/5$
$\mathbf{E}[X] = 2 \cdot 3/5 + 3 \cdot 2/5 = 2.4$,
$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[Y^2] - \mathbf{E}[Y]^2 = 6 - 2.4^2 = 6/25 = 0.24$

c) Im Schnitt werden $2.8 - 2.4 = 0.4$ Inspektionen eingespart.

4. 1b, 2b, 3a, 4c, 5b

5. 1b, 2e, 3d, 4c, 5c