Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** Da sie jeweils zusammen Schlitteln gehören auch die beiden Zeiten zusammen. Also gepaarte Stichproben.

b) H_0: beide gleich schnell, Differenz = 0.
H_A: beide nicht gleich schnell, Differenz $\neq 0$.
Zweiseitiger Test, da von vornherein nicht klar ist, wer schneller sein sollte.

c)

$$T = \sqrt{n}\ \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_{x-y}} = \sqrt{6}\ \frac{13}{9.78} = 3.26.$$

d) $t_{5;0.975} = 2.571$. Der Verwerfungsbereich ist also $\{t \mid |t| \geq 2.571\}$.

e) Nullhypothese wird verworfen, da $3.26 > 2.571$. Corinne ist also signifikant schneller.

f) Ein ungepaarter Test berücksichtigt nicht, dass die Zeiten von Tag zu Tag recht stark variieren. Die Varianz ist also grösser und deshalb wird der Test weniger signifikant.

g) Normalverteilung.

h) $2 * (\binom{6}{1} + \binom{6}{0}) * 0.5^6 = 0.21875$.

2. Anzahl Felchen im See: X
Anzahl markierter Felchen: X_m mit $X_m \leq X$
Anzahl gefangener Felchen: Y
Anzahl gefangener Felchen mit Markierung: Y_m mit $Y_m \leq Y$.
Wahrscheinlichkeit eine markierte Felche zu fangen: $0 \leq p \leq 1$.

a) $p = 1000/5000 = 0.2$.

b) Näherung $X_m/X \approx Y_m/Y$. Daraus folgt $X \approx X_m(Y/Y_m)$. Also $\hat{X} = 1000(100/25) = 4000$. [dieser Weg ist equivalent zur Schätzung von p durch $\hat{p} = 25/100 = 0.25$]

c) Vertrauensintervall für p:

$$\hat{p} \pm \Phi^{-1}(0.975) \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}/\sqrt{n},$$

wobei die Anzahl Versuche n hier gleich Y ist. Also:

$$\hat{p} \pm 0.196 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = 0.25 \pm 0.196 \cdot \sqrt{0.1875} = [0.1651, 0.3349].$$

Damit ergibt sich ein Vertrauensintervall für die Anzahl Felchen X im See über die Beziehung $X = X_m/p$ als

$$[1000/0.3349, 1000/0.1651] = [2986, 6057].$$

3. **a)** Kosten für Schwarzfahren bei Kontrolle: c
Kosten für Schwarzfahren:

$$X = \begin{cases} c & \text{bei Kontrolle} \\ 0 & \text{ohne Kontrolle} \end{cases}$$

Durschnittliche Kosten für Tramfahrt: $E(X) = p \cdot c$. Es soll gelten $E(X) = 1$ und daher muss die Strafe c mindestens $c = 1/p = 50$ betragen.

b) Sei Z die Anzahl von Kontrollen auf 10 Fahrten. Die Wahrscheinlichkeit, auf 10 Fahrten nie kontrolliert zu werden:

$$P(Z = 0) = \binom{10}{0}(1-p)^{10} = (1-p)^{10} = 0.817.$$

Die Wahrscheinlichkeit, auf 10 Fahrten mindestens zweimal kontrolliert zu werden:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2) = 1 - P(Z = 0) - P(Z = 1) &= 1 - \binom{10}{0}(1-p)^{10} - \binom{10}{1}(1-p)^9 p^1 \\ &= 1 - (1-p)^{10} - 10(1-p)^9 p \\ &= 1 - 0.817 - 0.1667 \\ &= 0.01617. \end{aligned}$$

c) Sei $Y \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Fahrt bei der Christoph das erste Mal erwischt wird. Die Wahrscheinlichkeiten betragen (wobei $Y = 4$ bedeutet, dass er nie kontrolliert wird.

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= p = 0.02 \\ P(Y = 2) &= (1-p)p = 0.0196 \\ P(Y = 3) &= (1-p)^2 p = 0.0192 \\ P(Y = 4) &= (1-p)^3 = 0.941 \end{aligned}$$

Die Kosten K betragen für $Y \in \{1, 2, 3\}$ genau $100 + (3 - Y)$ (Strafe plus Ticket für folgende Fahrten). Für $Y = 0$ betragen die Kosten 0. Die erwarteten Kosten sind also

$$E(K) = \sum_{i=1}^{3} P(Y = i)(103 - i) = 2.04 + 1.9796 + 1.9208 = 5.9404.$$

d) Die Anzahl Kontrollen X in die Christoph gerät ist Binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0.02$. Dies kann mit einer Posissonverteilung genähert werden mit Parameter $\lambda = n \cdot p = 2$.

4. 1) f

2) b

3) b

4) a

5) d
6) b
7) c
8) d
9) a

5. 1) a
2) c
3) d
4) d
5) c
6) b