2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1. a) Anzahl richtige Vorhersagen X ist $\text{Bin}(n, p)$. Daher ist $\mathbf{E}[X] = np = 5$ und $\text{Var}(X) = np(1-p) = 2.5$.

b) Verwende Zentralen Grenzwertsatz: $Y = \sum_{k=1}^{100} X_i$; $Y \sim \mathcal{N}(50, 25)$, daher ist

$$\text{P}[Y > 55] = \text{P}[Z > 1] = 1 - \text{P}[Z \leq 1] = 1 - 0.841 = 0.159$$

c) Das 99%-Quantil ist 2.326. Daher ist das 99%-Quantil der Verteilung Y gleich $2.326 * 5 + 50 = 61.63$. Der Annahmebereich ist somit $[0, 61]$ und die Nullhypothese kann nicht verworfen werden.

d) Nun ist $Y \sim \mathcal{N}(60, 24) \approx \mathcal{N}(60, 5^2)$. Es Hypothese "übersinnlich" wird verworfen, wenn $Y > 60$. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\text{P}[Y > 60] = 1 - \text{P}[Y < 60] = 1 - \text{P}[Z < 0] = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Die Macht ist also 0.5.

2.
1. b) ungepaart
2. a) gepaart
3. a) Die Gleitzahlen unterscheiden sich nicht
4. c) Corinne's Gleitschirm hat eine grössere Gleitzahl
5. a) 2.97
6. b) 1.86
7. d) sowohl als auch 5
8. b) Die Gleitzahlen unterscheiden sich signifikant auf dem 5

3. a) Man hat 2 Franken auf Rot und einen auf Schwarz gesetzt. Für den Ausgang einer Runde im Roulette gibt es zwei Möglichkeiten:

– **Rot gewinnt:** Für die 2 Franken, die man auf Rot gesetzt hat, erhält man einen Gewinn von 2 Franken (man bekommt effektiv 4 Franken: Die zwei, die man gesetzt hat und dann noch zwei als Gewinn; laut Aufgabenstellung rechnen wir nur mit dem Gewinn). Der Franken, den wir auf Schwarz gesetzt haben geht verloren (negativer Gewinn -1). Falls Rot gewinnt, ist der Gewinn also $x_{rot} = 2 - 1 = 1$.

– **Schwarz gewinnt:** Die 2 Franken, die man auf Rot gesetzt hat, gehen verloren. Für den einen Franken, den man auf Schwarz gesetzt hat erhält man einen Franken Gewinn. Falls Schwarz gewinnt, ist der Gewinn also $x_{schwarz} = 1 - 2 = -1$.

Der Gewinn X ist also eine diskrete Zufallsvariable, die die Werte 1 und -1 mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen kann. Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X, die die Zustände x_i $(i = 1, \dots, n)$ annehmen kann ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathrm{P}[X = x_i] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Der erwartete Gewinn ist also 0 Franken.

b) Gemäss Skript ist die Varianz gegeben durch:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}[X])^2$$

Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass $\mathbf{E}[X] = 0$. Also müssen wir noch $\mathbf{E}[X^2]$ berechnen. X^2 ist genau wie X eine diskrete Zufallsvariable. Sie kann die Werte 1^2 und $(-1)^2$ mit jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen. Somit ist also $\mathbf{E}[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Setzt man diese Werte in die Formel für die Varianz ein, erhält man $\mathrm{Var}(X) = 1 - 0^2 = 1$. Die Varianz des Gewinns ist also 1.

c) Der Zentrale Grenzwertsatz besagt folgendes:

X_i seien unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen. Erwartungswert und Varianz (existieren und) sind gegeben durch $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Bezeichnen wir die Summe der Zufallsvariablen mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und den Mittelwert der Zufallsvariablen mit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ dann gilt für grosse n $(n \to \infty)$:

$$S_n \sim \mathcal{N}\left(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2\right) \tag{1}$$

und

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{2}$$

Am einfachsten löst man die Aufgabe, indem man Gleichung (1) verwendet:

$$0.95 = \mathrm{P}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geq -10\right] = \mathrm{P}[S_n \geq -10] \tag{3}$$

Gemäss Zentralem Grenzwertsatz und mit $\mathbf{E}[X_i] = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ aus den beiden vorhergehenden Teilaufgaben ist die Verteilung von S_n also $\mathcal{N}(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2) = \mathcal{N}(n \cdot 0, n \cdot 1) = \mathcal{N}(0, n)$. Die Lösung von Gleichung (3) erhält man dann durch Standardisieren:

$$0.95 = \mathrm{P}[S_n \geq -10] = 1 - \mathrm{P}[S_n \leq -10] = 1 - \mathrm{P}\left[\frac{S_n - 0}{\sqrt{n}} \leq \frac{-10 - 0}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \Phi(\frac{-10}{\sqrt{n}})$$

Durch umformen erhält man

$$\Phi(\frac{-10}{\sqrt{n}}) = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{-10}{\sqrt{n}} = q_{0.05} \tag{4}$$

wobei $q_{0.05}$ das 5% Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Leider ist das 5% Quantil $q_{0.05}$ der Standardnormalverteilung nicht tabelliert. Da die Standardnormalverteilung aber um die y-Achse spiegelsymmetrisch ist, ist das 5%-Quantil $q_{0.05}$ betragsmässig so gross wie das 95%-Quantil $q_{0.95}$ und hat das andere Vorzeichen: $q_{0.05} = -q_{0.95}$ (man versteht das am einfachsten, wenn man eine kleine Skizze der Standardnormalverteilung anfertigt). Aus der Tabelle finden wir $q_{0.95} = 1.65$. Also ist $q_{0.05} = -1.65$.

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (4) ein, so erhält man

$$n = \left(\frac{-10}{q_{0.05}}\right)^2 = \left(\frac{-10}{1.65}\right) \approx 36.7$$

Die Anzahl Spiele muss natürlich eine ganze Zahl sein. Also runden wir das Ergebnis auf 37. Es müssen also ca. 37 Spiele gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit höchstens 10 Franken zu verlieren etwa 0.95 ist.

d) Der Gewinn von Corinne X_C ist analog wie vorher eine diskrete Zufallsvariable. Falls Rot gewinnt, sind die drei Franken verloren, d.h., $x_{rot} = -3$. Falls Schwarz gewinnt, gewinnt man drei Franken, d.h., $x_{schwarz} = 3$. Beide Fälle treten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf. Der Erwartungswert und die Varianz lassen sich analog wie in den obigen Teilaufgaben berechnen:

– $\mathbf{E}\left[X_C\right] = 3 \cdot \frac{1}{2} + (-3) \cdot \frac{1}{2} = 0$
– $\mathrm{Var}\left(X_C\right) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}\left[X\right])^2 = \mathbf{E}\left[X^2\right] - 0^2 = 3^2 \cdot \frac{1}{2} + (-3)^2 \cdot \frac{1}{2} = 9$

Im Mittel bringt dieses Spiel also auch weder Gewinn noch Verlust. Allerdings ist die Varianz wesentlich höher. D.h., Gewinn und Verlust nach jedem *einzelnen* Spiel ist hoch, auch wenn sich Gewinn und Verlust auf lange Sicht aufheben. Es ist daher möglich in kurzer Zeit schon viel Geld zu verlieren. Mit Corinnes Methode läuft man also Gefahr, in kürzerer Zeit 10 Franken zu verlieren, d.h., man kann weniger lang spielen.

4. 1) b
2) c
3) d
4) a
5) b
6) a
7) a
8) b
9) b

5. 1) a
2) e
3) b
4) c
5) a