2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1. **a)** Angenommen, der wahre Wert betrage $p = 0.5$. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass von 3 Bäumen genau einer das erste Jahr überlebt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bäume überleben?

$$p = \binom{3}{1} 0.5^3 = 3 \cdot 0.5^3 = 0.375$$

$$p = \binom{3}{3} 0.5^3 = \cdot 0.5^3 = 0.125$$

b)

$$\hat{p} = 0.5$$

Das Vertrauensintervall ist (mit Hilfe der Normalapproximation):

$$[\hat{p} - \Phi^{-1}(0.975)\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}, \hat{p} + \Phi^{-1}(0.975)\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}] \sim [0.4, 0.5].$$

c) Die Länge des Vertrauensintervalles ist maximal für $\hat{p} = 0.5$ und dort gegeben durch

$$2\Phi^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{1}{4n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dies soll kleiner als 0.02 sein. Daher muss gelten $\sqrt{n} \geq 100$, was identisch ist zu $n \geq 10000$.

2.
1) c)
2) d)
3) b)
4) d)
5) b)
6) b)
7) d)
8) c)
9) b)

3. **a)** $\mathbf{E}[X] = p = 0.5$, $\mathrm{Var}(X) = p(1-p) = 0.25$.

b) Für ein Spiel ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen gegeben durch $p = 0.5^2 = 0.25$. Der Gewinn für zwei Spiele ist also Binomialverteilt $Y \sim B(2, 0.25)$. Daher $\mathbf{E}[Y] = 0.5$, $\mathrm{Var}(Y) = 2p(1-p) = 2 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.375$.

c) Die Wahrscheinlichkeit, in einem Spiel zu gewinnen ist $p = 0.5^k$. Daher muss 2^{k-1} mal gespielt werden, um einen erwarteten Gewinn von 0.5 zu erzielen. Die Verteilung des Gewinns ist $B(2^{k-1}, 2^{-k})$ mit Varianz $np(1-p) = 0.5(1-2^{-k})$. Die Verteilung lässt sich durch eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda = np = 0.5$ nähern für grosse Werte von k.

4. 1) a)

2) a)

3) b)

4) a)

5) b)

6) c)

5. 1) c)

2) d)

3) c)

4) d)

5) b)

6) c)