2. Vordiplom: Statistik Musterlösung

1.
- R: Anzahl roter Ameisen
- S: Anzahl schwarzer Ameisen
- p_r: Wahrscheinlichkeit, dass eine Ameise rot ist
- p_s: Wahrscheinlichkeit, dass eine Ameise schwarz ist

a)

$$\begin{aligned} P[R=1] &= \binom{3}{1} p_r\, p_s^2 \\ &= 3 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 \\ &= 0.384 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E[R] &= n \cdot p_r = 10000 \cdot 0.2 = 2000 \\ Var[R] &= n \cdot p_r \cdot (1-p_r) = 10000 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1600 \end{aligned}$$

c) Normalapproximation:

$$R \sim \mathcal{N}(2000, 1600) \rightarrow P[R > 2000] = 0.5$$

d)

$$\begin{aligned} H_0 &: p_r = 0.2 \\ H_1 &: p_r > 0.2 \end{aligned}$$

Verwerfungsbereich: $[E[R] + 1.65 * \sqrt{Var[R]}, \infty] = [2066, \infty]$.

Testentscheid: H_0 kann verworfen werden auf dem 5% Niveau.

2.

a)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} P[X \leq 10] &= F(10) = 1 - \exp(-\lambda x) \\ &= 1 - \exp(-1) \\ &= 0.632 \end{aligned}$$

c)

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Sei Y die Differenz der Wartezeiten $Y = X_1 - X_2$, wobei X_1 die Wartezeit für $\lambda_1 = 0.1$ und X_2 die Wartezeit für $\lambda_2 = 0.2$ ist. Dann

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X_1 - X_2] = E[X_1] - E[X_2] \\ &= \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \\ &= \frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2} = 5 \ sec \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 20 \ sec \\ \rightarrow \widehat{\lambda} &= \frac{1}{\overline{X}} \\ &= \frac{1}{20} = 0.05 \ 1/sec \end{aligned}$$

3. 1 Punkt für korrekt, -0.5 Punkte für falsch, Minimum gesamt 0 Punkte.
1a, 2a, 3c, 4b, 5b

4. 1 Punkt für korrekt, -0.5 Punkte für falsch, Minimum gesamt 0 Punkte.
1b, 2a, 3b, 4b, 5d, 6a
ACHTUNG! Die Kombination 4a, 5a ist (zusammen) mit plus 0.5 Punkten zu bewerten (Folgefehler).

5. Wir definieren folgende Ereignisse:

- A_1: Mein Freund steckt den Brief Dienstag ein.
- A_2: Mein Freund steckt den Brief Mittwoch ein.
- A_3: Mein Freund steckt den Brief noch später ein.
- B_1: Die Post stellt am folgenden Tag zu.
- B_2: Die Post stellt am übernächsten Tag zu.
- B_1: Die Post stellt noch später zu.

Die Ereignisse A_i, B_j sind für alle i, j unabhängig. $C = [A_1 \cap (B_1 \cup B_2)] \cup [A_2 \cap B_1]$ ist das Ereignis, dass ich bis Donnerstag den Brief erhalten habe.

a) $P(C) = 0.7 * 0.8 + 0.7 * 0.15 + 0.15 * 0.8 = 0.785.$

b)

$$P(A_1|C^c) = \frac{P(A_1 \cap C^c)}{P(C^c)} = \frac{P(A_1 \cap B_3)}{1 - P(C)} = \frac{0.7 * 0.005}{1 - 0.785} = 0.163.$$

(Achtung, auf Folgefehler achten; wenn bei a) nicht 0.785 herausgekommen ist, dann muss der Nenner hier natürlich auch nicht 1-0.785 sein.)

c)

$$P(C|A_1^c) = \frac{P(C \cap A_1^c)}{P(A_1^c)} = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{1 - P(A_1)} = \frac{0.15 * 0.8}{0.3} = 0.4.$$