Bachelorprüfung: Statistik (1 Stunde)

Bemerkungen:

- Es sind alle mitgebrachten schriftlichen Hilfsmittel und der Taschenrechner erlaubt.
- Natels sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet! Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.
- Wenn nicht anders vermerkt, sind die Tests auf dem 5%-Niveau durchzuführen.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Bei den Aufgaben 1 und 2 muss der Lösungsweg ersichtlich sein, sonst gibt es keine Punkte.
- Aufgaben 3 und 4 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple Choice Aufgaben mit Kreuzchen in das separate Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. (7 Punkte)

Die Schweizer Skinationalmannschaft möchte zwei verschiedene Wachse für sehr kalten Schnee miteinander vergleichen. Einerseits den "Ice Blizzard" und andererseits den "Freeze Rocket" Wachs. An einem eisig kalten Tag machen sie Tests. Alle 8 Leute des Kaders fahren einen ausgesteckten Kurs jeweils einmal mit einem Ski, der mit "Ice Blizzard" präpariert wurde und einmal mit einem Ski, der mit "Freeze Rocket" eingewachst wurde. Beide Male wird die Zeit gestoppt. Der Trainer notiert sich Folgendes (dabei bezeichnen X_i die Werte für "Ice Blizzard", Y_i die Werte für "Freeze Rocket" und $D_i = X_i - Y_i$ in Sekunden):

	Marco	Carlo	Silvan	Didier	Marc	Ambrosi	Daniel	Tobias	Mittel
X_i	63.75	64.07	63.67	64.64	64.13	63.67	64.19	64.30	64.05
Y_i	64.63	64.28	64.90	64.56	64.05	63.51	64.75	64.38	64.38
D_i	-0.88	-0.21	-1.23	0.08	0.08	0.16	-0.56	-0.08	-0.33

Die geschätzten Standardabweichungen sind $\hat{\sigma}_x = 0.34$, $\hat{\sigma}_y = 0.44$ und $\hat{\sigma}_{x-y} = 0.51$.

Sie dürfen davon ausgehen, dass die zu Grunde liegenden Zufallsvariablen normalverteilt sind.

Den Trainer interessiert es nun, ob die Wahl des Wachses eine Auswirkung auf die Zeit hat.

a) Handelt es sich hier um einen gepaarten oder einen ungepaarten Test? Begründen Sie kurz.

b) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an.

c) Führen Sie einen t-Test auf dem 5%-Niveau durch. Geben Sie den Verwerfungsbereich an. Wie entscheidet dieser Test?

d) Geben Sie ein zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall an für die Differenz $\mu_x - \mu_y$.

e) Angenommen die Standardabweichungen wären nicht geschätzt, sondern aus langjähriger Erfahrung bekannt. Würde sich der P-Wert vergrössern oder verkleinern, falls man anstatt eines t-Tests einen z-Test macht? Begründen Sie.

2. (8 Punkte)
Das Format eines Fernsehquizzes sieht vor, dass ein Kandidat 16 aufeinanderfolgende (und ganz verschiedene) Fragen gestellt bekommt und bei jeder Frage 4 Antworten zur Auswahl stehen, von denen genau eine richtig ist. Uns interessiert die Anzahl richtig beantworteter Fragen.

Wir nehmen zunächst an, dass der Kandidat die Antworten zu diesen Fragen gar nicht kennt und zufällig antwortet, sowie, dass seine Antworten zu verschiedenen Fragen unabhängig voneinander sind.

a) Mit welcher Verteilung kann man dann die Anzahl richtiger Antworten beschreiben? (Verteilungsfamilie *und* Parameter angeben)

b) Welches sind in diesem Fall Erwartungswert und Varianz der Anzahl richtiger Antworten?

c) Nun wird wegen Ausfalls der nachfolgenden Sendung die Quizshow auf 50 Fragen verlängert (wiederum jede mit 4 Antworten zur Auswahl). Mit welcher stetigen Approximation kann man die Anzahl richtig beantworter Fragen (aus den 50) nun einfacher modellieren? (Verteilungsfamilie *und* Parameter angeben)

Verwenden Sie bei der Teilaufgabe d) die Approximation aus c).

d) Der Kandidat beantwortet genau 15 der 50 Fragen richtig. Kann man auf dem 5%-Signifikanzniveau ausschliessen (verwerfen), dass er geraten hat statt tatsächlich etwas zu wissen? Schreiben Sie dazu in Formeln Null- und Alternativhypothese, die Teststatistik und den Verwerfungsbereich auf, und geben Sie die Entscheidung des Tests an.

3. (8 Punkte)

Wir betrachten hier Daten, welche den Zusammenhang des Gewichts in Kilogramm (Y), des `Alters` in Monaten (x_1) und der `Grösse` in Zentimetern (x_2) von Kleinkindern untersuchen.

An diese Daten wurde folgendes Regressionsmodell angepasst:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i,1} + \beta_2 x_{i,2} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \quad \text{i.i.d.}$$

Hier sehen Sie einen Teil des R-Outputs:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    0.645        ???   0.049    0.962
Alter          0.070      0.110     ???    0.528
Groesse        0.132        ???     ???      ???

Residual standard error: 4.377 on 30 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5084,        Adjusted R-squared: 0.4757
F-statistic: 15.51 on 2 and 30 DF,  p-value: 2.364e-05
```

1) Wie gross ist der Wert der t-Teststatistik von $\hat{\beta}_1$ (`Alter`)?
   a) 0.008 b) 0.636 c) 0.058 d) 4.8

2) Mit wievielen Beobachtungen wurde die Regression berechnet?
   a) 33 b) 32 c) 31 d) 30

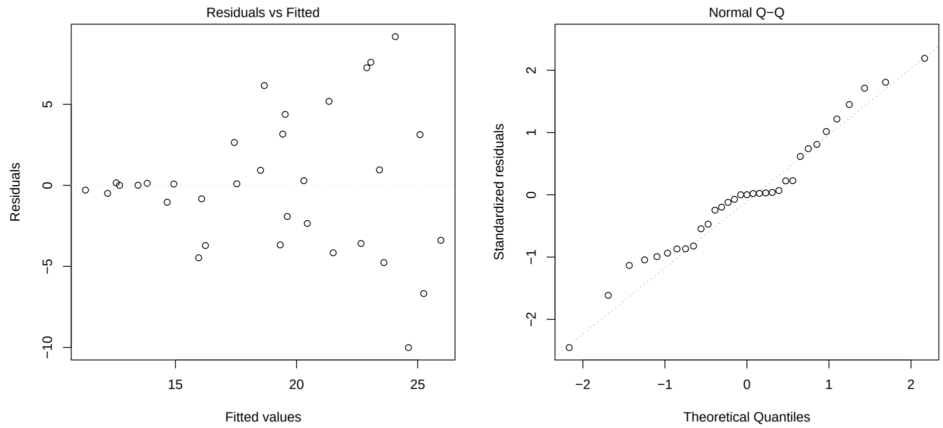
3) Hat mindestens eine der beiden erklärenden Variablen `Alter` oder `Groesse` einen signifikanten Einfluss auf die Zielgrösse?
   a) Ja.
   b) Nein.
   c) Man müsste zwei einfache Regressionen machen, um dies zu entscheiden.
   d) Keine Aussage möglich.

4) Wird die Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 0$ auf dem 5%-Niveau verworfen (die Alternative ist $H_A : \beta_1 \neq 0$)? β_1 ist der Koeffizient des Alters im Regressionsmodell.
   a) Ja b) Nein c) Keine Aussage möglich

5) Wird $H_0 : \beta_2 = 0$ auf dem 5%-Niveau verworfen (die Alternative ist $H_A : \beta_2 \neq 0$)?
   a) Ja b) Nein c) Keine Aussage möglich.

6) Welches der folgenden Intervalle ist ein exaktes zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für β_1 (`Alter`)?
   a) $0.07 \pm 1.96 \cdot 0.11$ b) $0.07 \pm 1.96 \cdot \frac{0.11}{\sqrt{30}}$
   c) $0.07 \pm 2.04 \cdot \frac{0.11}{\sqrt{30}}$ d) $0.07 \pm 2.04 \cdot 0.11$

7) Max und sein jüngerer Bruder Moritz unterscheiden sich um genau 20cm. Wie gross ist der erwartete Gewichtsunterschied?
   a) Der erwartete Gewichtsunterschied der beiden Kinder ist 3.29kg.
   b) Der erwartete Gewichtsunterschied der beiden Kinder ist 2.64kg.
   c) Keine Aussage möglich.



8) Betrachten Sie die gezeigten Plots. Welche der nachfolgenden Aussagen ist zutreffend?

   a) Die Modellannahmen über die Fehler scheinen plausibel.
   b) Die Normalitätsannahme der Fehler ϵ_i scheint grob verletzt zu sein, aber die Annahme der konstanten Varianz scheint plausibel.
   c) Die Annahme der konstanten Varianz der Fehler ϵ_i scheint verletzt zu sein, aber Normalitätsannahme der Fehler ϵ_i scheint plausibel.
   d) Die Normalitätsannahme der Fehler ϵ_i und die Annahme der konstanten Varianz der Fehler ϵ_i scheinen grob verletzt zu sein.

4. (5 Punkte)

1) Ein elektrisches Bauteil habe eine Lebensdauer T (in Stunden), die mit einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1/500$ gut modellierbar ist. Bestimme den Zeitpunkt t, der mit 90% Wahrscheinlichkeit "überlebt" wird.

   a) 25.6　　b) 1151.3　　c) 500
   d) 2302.6　　e) 52.7　　f) Aussagen a) bis e) sind falsch

2) Es sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 32$ und $\sigma^2 = 10$. Ferner sei $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda = 18$ und unabhängig von X. Wie gross ist $\mathbf{E}[X - Y]$?

   a) 50　　b) 41　　c) 14
   d) 28　　e) 23　　f) Aussagen a) bis e) sind falsch

3) Max hat in seinem Sparschwein 500 5-Rappen Münzen angesammelt. Er wirft nun sein Sparschwein auf den Boden, so dass es zerbricht. Wir nehmen an, dass die Münzen unabhängig voneinander Kopf oder Zahl zeigen. Mit welcher Verteilung lässt sich approximativ die Anzahl Münzen modellieren, die Kopf zeigen?

   a) Poissonverteilung　　b) Normalverteilung
   c) Uniforme Verteilung　　d) Exponentialverteilung

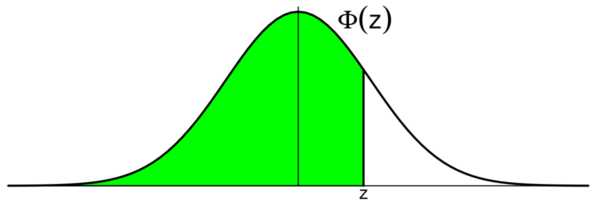
4) Das 95%-Vertrauensintervall bei einem 1-Stichproben t-Test für den Erwartungswert μ sei $[0.125, 3.18]$. Wird die Nullhypothese $H_0 : \mu = 0.13$ auf dem 1%-Niveau verworfen?

   a) Ja　　b) Nein　　c) Keine Aussage möglich

5) Wenn $X \sim \text{Poisson}(100)$ verteilt ist, so gilt für $Y = \frac{1}{10}X$:

   a) $Y \sim \text{Poisson}(1)$　　b) $Y \sim \text{Poisson}(10)$
   c) $Y \sim \mathcal{N}(1, \frac{1}{10})$　　d) Aussagen a) bis c) sind falsch

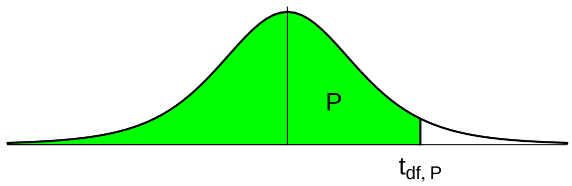
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \leq z\right], \; Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576