Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. a) **(1P)** Gepaart, da jeweils dieselbe Person einmal mit dem einen Wachs und einmal mit dem anderen Wachs fährt.

b) **(1P)** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$

c) **(1P)**

1. **Modell**: D_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, $i = 1, \ldots, n$.
2. **Nullhypothese** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ bzw. $\mu_D = 0$;
   Alternativhypothese $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ bzw. $\mu_D \neq 0$.
3. **Teststatistik:** $T = \dfrac{\sqrt{n}\hat{\mu}_D}{\hat{\sigma}_D}$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0: $T \sim t_7$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:**
   $K = (-\infty, -t_{7,1-\alpha/2}] \cup [t_{7,1-\alpha/2}, \infty) = (-\infty, -2.365] \cup [2.365, \infty)$
6. **Testentscheid:** $t = \frac{\sqrt{8}\cdot -0.33}{0.51} = -1.830 \notin K$, also wird H_0 beibehalten.

d) **(2P)** Das zweiseitige 95%-Vertrauensintervall ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mu}_D - t_{7,1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_D}{\sqrt{n}}, \hat{\mu}_D - t_{7,1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}_D}{\sqrt{n}}\right] &= \left[-0.33 - 2.365 \cdot \frac{0.51}{\sqrt{8}}, -0.33 + 2.365 \cdot \frac{0.51}{\sqrt{8}}\right] \\ &= [-0.756, 0.096].\end{aligned}$$

e) **(2P)** Entweder: Mit zusätzlichem Wissen wird die Macht eines Testes grösser, daher wird der Verwerfungsbereich grösser.
Oder: Das 97.5%-Quantil von t_7 ist 2.3646 und das einer Standardnormalverteilung 1.96, vergleiche dann mit **c**).

2. a) **(1P)** Bei zufälligen Antworten des Kandidaten hat dieser bei jeder Frage eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 25%. Da die Richtigkeit seiner Antworten auf verschiedene Fragen zudem unabhängig ist, folgt die Anzahl X seiner richtigen Antworten einer Binomialverteilung $(\mathbf{1/2\ P})$ mit Parametern $n = 16$ (Stichprobengrösse) und $p = 0.25$ (Erfolgswahrscheinlichkeit) $(\mathbf{1/2\ P})$.

b) $(\mathbf{1P})$ Der Mittelwert beträgt $E[X] = np = 4$ $(\mathbf{1/2\ P})$, die Varianz $Var[X] = np(1-p) = 3$ $(\mathbf{1/2\ P})$.

c) Die nützlichste stetige Verteilung hier ist die Normalverteilung $(\mathbf{1/2\ P})$. Deren Parameter sollte man so wählen, dass sie denselben Mittelwert und dieselbe Varianz aufweist wie die zu approximierende Binomialverteilung. Also ist $\mu = E[X] = 50 \cdot 0.25 = 12.5$ $(\mathbf{1/2\ P})$ und $\sigma = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{50 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 3.062$ $(\mathbf{1/2\ P})$.

d) **(4.5 P)**

1. **Modell**: X: Anzahl richtiger Antworten; $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ mit $n = 50$
2. **Nullhypothese** $H_0 : p = p_0 = \frac{1}{4}$ **(0.5 P)**
   Alternativhypothese $H_A : p > \frac{1}{4}$ **(0.5 P)**
3. **Teststatistik:** $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $Z \approx \mathcal{N}(0, 1)$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:**
   $K = [\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty) = [1.645, \infty)$ **(2 P)**
6. **Testentscheid:** $z = \dfrac{15 - 12.5}{3.062} = 0.816 \notin K$ **(1 P)**, daher wird die Nullhypothese *nicht* verworfen. **(0.5 P)**

3.

1) b)
2) a)
3) a), der F-Test hat einen sehr kleinen p-Wert
4) b), der P-Wert für das Alter ist grösser als 5%
5) c), Trotz signifikantem F-Test ist es bei korrelierten erklärenden Variablen möglich, dass beide t-Tests nicht signifikant sind
6) d), $\hat{\beta}_1 \pm \widehat{s.e.}(\hat{\beta}_1) \cdot t_{30;0.975}$
7) c), keine Aussage möglich ohne Angabe des Altersunterschieds
8) c)

4.

1) e) $1 - \exp(-\lambda \cdot t) = 0.9$; löse nach t auf.
2) c) E[X-Y] = E[X] - E[Y] = 32 - 18 = 14.
3) b) Eigentlich Binomialverteilung. Bei so vielen Münzen ist die Normalverteilung aber schon sehr gut (in meinen Augen ist die Aufgabe nicht ganz wasserdicht formuliert; Poissonverteilung wäre auch denkbar.)
4) b) Weil das Vertrauensintervall die 0 nicht enthält, kann H0 auf dem 5% Niveau nicht verworfen werden. Dann kann H0 aber erst recht nicht auf dem viel strengeren 1% Niveau verworfen werden.
5) d) Die Funktion einer Zufallsvariable hat im Allgemeinen eine völlig andere Verteilung.