Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. a) **(1 Punkt)** Es muss ein ungepaarter Test durchgeführt werden, da die Test- und Kontrollmessungen auf unterschiedlichen Pisten durchgeführt werden (und nicht je 1 Test- und 1 Kontrollmessung pro Piste). Auf einen ungepaarten Test weist zudem die unterschiedliche Anzahl Messungen in den beiden Gruppen klar hin.

b) **(2 Punkte)** Die Grösse, über die man etwas zeigen will, ist der mittlere Unterschied $\mu_X - \mu_Y$ der Schneeschmelzraten zwischen Behandlungs- und Kontrollgruppe. Der Effekt, den man nachweisen möchte, ist ein einseitiger. Also haben wir die Nullhypothese

$$H_0: \ \mu_X - \mu_Y = 0$$

und die Alternativhypothese

$$H_1: \ \mu_X - \mu_Y < 0 \ .$$

c) **(2 Punkte)**

1. **Modell**: X_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $i = 1, \ldots, n$, und Y_i i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, $i = 1, \ldots, m$.
2. **Nullhypothese** $H_0 : \mu_X = \mu_Y$;
   Alternativhypothese $H_A : \mu_X < \mu_Y$
3. **Teststatistik:**
   $$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_{\text{pool}}} \sqrt{\frac{1}{1/n + 1/m}}$$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $T \sim t_{60}$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:**
   $K = (-\infty, -t_{60,1-\alpha}] = (-\infty, -1.67]$
6. **Testentscheid:** $t = \dfrac{15.4 - 19.7}{4.15} \sqrt{\dfrac{1}{1/26 + 1/36}} = -4.03 \in K$, also wird H_0 verworfen.

d) **(1 Punkt)** Ein Vorzeichentest setzt gepaarte Daten voraus – die hier nicht vorliegen.

2. a) **(2 Punkte)**

- S_n: Anzahl Männer die Medizin studieren.
- $p = 0.5$: Wahrscheinlichkeit, dass ein Medizinstudent ein Mann ist (Männer und Frauen gleich verteilt)

$$\begin{aligned} S_{22} &\sim \operatorname{Bin}(22, 0.5) && \textbf{(1 P)} \\ \mathbf{E}[S_{22}] &= 22 \cdot 0.5 = 11 && \textbf{(0.5 P)} \\ \operatorname{Var}(S_{22}) &= 22 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 5.5 && \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

b) **(1 Punkt)**

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[S_{22} = 10] &= \binom{22}{10} \cdot 0.5^{10} \cdot 0.5^{22-10} && \textbf{(0.5 P)} \\ &= 0.154 && \textbf{(0.5 P)} \end{aligned}$$

c) **(3 Punkte)**

1. **Modell**: S_n: Anzahl männliche Medizinstudenten; $S_n \sim \text{Binomial}(n, p)$ mit $n = 22$
2. **Nullhypothese** $H_0 : p = p_0 = \frac{1}{2}$;
   Alternativhypothese $H_A : p \neq \frac{1}{2}$. **(0.5 P)**
3. **Teststatistik:** $Z = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ **(1 P)**
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $Z \approx \mathcal{N}(0, 1)$ **(0.5 P)**
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:**
   $K = (-\infty, -\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})] \cap [\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}), \infty) = (-\infty, -1.96] \cap [1.96, \infty)$ **(0.5 P)**
6. **Testentscheid:** $z = 2.132 \in K$, daher wird die Nullhypothese verworfen. **(0.5 P)**

3. 1) c.

2) b, logarithmieren der Zielvariable ist eine Standardlösung wenn ein kegelförmiges Anwachsen der Streuung mit $\hat{y}_i$ auftritt.

3) a, $n = 14$ und $p = 2$.

4) b, $\frac{\hat{\beta}_1}{\widehat{s.e.}(\hat{\beta}_1)} = 0.95465/0.06349 = 15.036$.

5) a, $t_{12;0.975} = 2.179 < 15.036$.

6) d, $\hat{\beta}_1 \pm \widehat{s.e.}(\hat{\beta}_1) \cdot t_{12;0.975}$.

7) c, es wird einen zweiseitigen Test ausgeführt.

8) e, $\log(\text{p1980}) = 1.13 + 0.95 \log(42.3) = 4.71$ und $\text{p1980} = \exp(4.71) = 110.75$.

9) d, nach Definition von R^2.

10) a, der F-Test hat einen sehr kleinen p-Wert.

4. 1) $\mathrm{P}[T \geq 1000] = 1 - \mathrm{P}[T < 1000] = 1 - (1 - \exp(-0.0004916 \cdot 1000)) = \exp(-0.4916) = 0.6116$, also b).

2) d).

3) $\mathrm{P}[T \leq t_H] = 0.5 \Leftrightarrow 1 - \exp(\lambda \cdot t_H) = 0.5 \Leftrightarrow \exp(\lambda \cdot t_H) = 0.5 \Leftrightarrow \lambda \cdot t_H = \ln(2)$. Durch Umformen erhält man $t_H \approx 1410$ Sekunden, also c).

4) $\mathrm{Var}\,(Y) = 1/9 \cdot \mathrm{Var}\,(X) = 1/9 \cdot 9 = 1$, also e).

5) $Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{E}\,[Y] = 3, \mathrm{Var}\,(Y) = 1) \Rightarrow \mathrm{P}[Y \geq 3] = \Phi(0) = 0.5$, also c),

6) Y hängt linear von X ab mit einer positiven Steigung, daher ist die Korrelation 1, also e).