Bachelorprüfung: Statistik Musterlösung

1. **a)** Gepaart. Jedem Produkt aus dem einen Laden kann genau ein Produkt aus dem anderen Laden zugeordnet werden. **(1 Punkt)**

b) Man nimmt an, dass die Differenzen unabhängig normalverteilt mit Parameter μ und σ^2 sind. **(1 Punkt)**
Mit dem Q-Q Plot. **(1 Punkt)**

c) $H_0 : \mu = 0, H_A : \mu \neq 0$. **(1 Punkt)**

d)

$$\hat{\sigma}_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2 = 1.5$$

wobei $\bar{D} = -0.5$ und $n = 6$. **(1 Punkt)**

e)
1. **Modell:** $D_1, \ldots, D_6$ i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma_D^2)$
2. **Nullhypothese:** $H_0 : \ \mu = 0$,
   Alternative: $H_A : \ \mu \neq 0$
3. **Teststatistik:** $T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{D} - \mu_0)}{\hat{\sigma}_D}$
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $T \sim \ t_{n-1}$
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.1$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik:**

$$\begin{aligned} K = & \ (-\infty, -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \infty) \\ = & \ (-\infty, -2.015] \cup [2.015, \infty) \end{aligned}$$

6. **Testentscheid:** $t = \dfrac{\sqrt{6}(-0.5)}{1.225} = -1.00$ Der beobachtete Wert der Teststatistik liegt nicht im Verwerfungsbereich. Also wird die Nullhypothese beibehalten.**(2 Punkte)**

f)

$$\begin{aligned} I &= [\bar{d} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.95}, \bar{d} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.95}] \\ &= [-0.5 - \frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{6}} * 2.015, -0.5 + \frac{\sqrt{1.5}}{\sqrt{6}} * 2.015] \\ &= [-1.508, 0.508] \ \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned} \tag{1}$$

2. (7 Punkte)

a) $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$ **(0.5 P)** mit $n = 10$ und $\pi = \frac{1}{6}$ **(0.5 P)**.

b) Durch Aufsummieren der Binomialverteilung findet man:

$$\begin{aligned} p &= P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X = k) \text{ \textbf{(0.5 P)}} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} \\ &= 0.2248 \quad \text{\textbf{(0.5 P)}} \end{aligned}$$

c) Normalapproximation: $Y \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2)$ **(0.5 P)** mit $\mu_0 = \pi \cdot 480 = 80$ **(0.5 P)** und $\sigma_0^2 = 480 \cdot \pi \cdot (1-\pi) = 66.67$ **(1 P)**.

d)
1. **Modell**: Y: Anzahl Spitzen in 480 Spargelstücken; $Y \sim \text{Binomial}(n', \pi)$
2. **Nullhypothese** $H_0 : \pi = \pi_0 = \frac{1}{6}$;
   Alternativhypothese $H_A : \pi < \pi_0 = \frac{1}{6}$.
   Es wird also einseitig getestet **(1 P)**
3. **Teststatistik:** Y **(0.5 P)**
   Verteilung der Teststatistik unter H_0**:** $Y \sim \text{Binomial}(n', \pi_0)$, $n' = 480$, $\pi_0 = \frac{1}{6}$.
4. **Signifikanzniveau:** $\alpha = 0.05$
5. **Verwerfungsbereich:** $K = (-\infty, c]$; aus Normalapproximation:

   $$c = n'\pi_0 - \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{n'\pi_0(1-\pi_0)} = 480 \cdot \frac{1}{6} - 1.64 \cdot \sqrt{480 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 66.6 \text{ \textbf{(1 P)}}$$

6. **Testentscheid:** $y = 72$, also $y \notin K$, daher wird die Nullhypothese *nicht* verworfen zugunsten der Alternativhypothese, dass das Personal Spargelspitzen nascht. **(0.5 P)**

(Sinngemässe Punktzahlen auch für andere Lösungswege.)

3. Je einen Punkt für:

1) f
2) e
3) c
4) c
5) a
6) c
7) c
8) b

4. (8 Punkte)

1) b) ($\Phi(-\frac{3}{2})$)
2) c) ($a < 2.45, b > 2.45$)
3) d) (9)
4) a) (unkorreliert)

5) c) (0.3456)
6) d) (0.0657)

7) f) (keinen der genannten Werte, sondern $\frac{2}{3}$)
8) a) ($\mu < \mathcal{E}(X)$)