Bachelorprüfung: Statistik (für Biol./Pharm. Wiss.) (1 Stunde)

Bemerkungen:

- Es sind alle schriftlichen Hilfsmittel und der Taschenrechner erlaubt.
- Natels sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Wenn nicht anders vermerkt, sind die Tests auf dem 5%-Niveau durchzuführen.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Aufgaben 3 und 4 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice-Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple-Choice-Aufgaben mit Kreuzchen in das separate Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. (8 Punkte)

Vor wenigen Jahren wurde ein neues Verfahren zur Bestimmung der Masse von Sternen entwickelt, das auf der Allgemeinen Relativitätstheorie beruht. Das klassische Verfahren stützt sich hingegen auf die klassische Mechanik und ist weithin akzeptiert, hat aber den Nachteil einer sehr grossen Ungenauigkeit.
Einige Forscher vermuten, dass das neue Verfahren einen systematischen Fehler hat und wollen es nun mit einem umfangreichen Experiment überprüfen. Dazu bestimmen sie die Masse von zehn Sternen gleichen Typs (also sehr ähnlichen Sternen) im Kugelsternhaufen M80 je einmal mit dem traditionellen und einmal mit dem neuen Verfahren. Die über alle zehn Sterne gemittelten Werte sind (jeweils in Sonnenmassen) $\bar{X} = 1.35$ für das neue und $\bar{Y} = 1.56$ für das traditionelle Verfahren. Die geschätzten Standardabweichungen betragen $\hat{\sigma}_X = 0.18$ sowie $\hat{\sigma}_Y = 0.45$. Die geschätzte Standardabweichung für die Differenz zwischen den beiden Verfahren beträgt $\hat{\sigma}_{X-Y} = 0.46$. Wir nehmen im Weiteren an, dass die einzelnen Werte als unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen ($\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ für die neue Methode, $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ für die traditionelle Methode) modelliert werden können.

Nun soll geprüft werden, ob die beiden Verfahren zu systematisch unterschiedlichen Resultaten führen.

a) Handelt es sich um einen gepaarten oder einen ungepaarten Test? Begründen Sie!

b) Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese an.

c) Geben Sie den Verwerfungsbereich und die Testentscheidung (mit Begründung) für einen t-Test auf dem 5% Niveau an.

d) Berechnen Sie ein zweiseitiges 95%-Vertrauensintervall für die Differenz $\mu_X - \mu_Y$.

e) Könnte an Stelle des t-Tests auch ein z-Test durchgeführt werden? Begründen Sie!

2. (8 Punkte)

Die low-cost Fluggesellschaft 'Air-Patatrack' verkauft (wie auch viele andere Fluggesellschaften) mehr Flugtickets pro Flug als Sitze im betreffenden Flugzeug vorhanden sind (so genanntes 'overbooking'). Grund für dieses Vorgehen ist, dass Kunden oft kurzfristig auf die Reise verzichten.
Air-Patatrack schätzt, dass 90% der gebuchten Tickets benutzt werden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von vier Personen, genau eine die Reise nicht antritt?

Für den Flug Zürich-Agno benutzt die Gesellschaft ein 'Beechcraft C12-J' mit 26 Passagierplätzen. Für den nächsten Flug sind 28 Plätze gebucht.

b) Welche Verteilung besitzt die Anzahl der Personen, die den Flug antreten möchten? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Passagiere Platz im Flugzeug finden?

Für die Flüge Zürich-Johannesburg benutzt die Air-Patatrack einen Airbus A380 mit 853 Sitzplätze. Für solche Flüge werden 890 Tickets verkauft.

d) Mit welcher stetigen Approximation kann man die Anzahl Personen, die den Flug nehmen möchten nun einfacher modellieren? (Verteilungsfamilie *und* Parameter angeben).

Von 890 Personen, die den Flug am 05.08 reserviert haben, sind nur 875 am Flughafen erschienen. Ist die Annahme, dass 90% der gebuchten Tickets benutzt werden angesichts dieser Daten plausibel?

e) Führen Sie einen zweiseitigen Test auf dem 5% Niveau durch. Geben Sie die Null- und die Alternativhypothese, die Teststatistik sowie den Testentscheid an. (Benutzen Sie die in **d)** bestimmte Approximation).

3. (7 Punkte)

In einer klinischen Studie wird untersucht, wie bei Patienten mit Prostata-Krebs der Level eines Prostata Antigens vom Volumen, dem Prostata-Gewicht und dem Alter des Patienten abhängt. Dazu wurde das folgende lineare Modell angepasst:

$$\log(psa_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \log(cavol_i) + \beta_2 \cdot \log(weight_i) + \beta_3 \cdot age_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ i.i.d.}$$

Der Regressionsoutput sieht wie folgt aus:

```
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
  -2.805   -0.411   -0.006    0.448    2.703

Coefficients:
               Estimate  Std.Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)     0.518    0.849      0.611    0.543
logcavol        0.642    ???        8.551    2.95e-13
logweight       0.468    0.181      2.579    0.012
age            -0.009    ???        ???      ???


Residual standard error: 0.802 on 90 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.491,   Adjusted R-squared: 0.474
F-statistic:  28.9 on 3 and 90 DF,  p-value: 3.539e-13
```

1) Wieviele Beobachtungen umfasst der verwendete Datensatz?
   a) 86   b) 90   c) 93
   d) 94   e) 97   f) 92

2) Wie gross ist der Standardfehler der Schätzung von β_1?
   a) 0.075   b) 0.152   c) 0.181   d) 0.087

3) Wie gross ist die geschätzte Varianz der zufälligen Fehler $\mathrm{Var}\,\epsilon_i$?
   a) 0.643   b) 0.585   c) 0.802   d) keine Aussage möglich

4) Wird die Nullhypothese $H_0 : \beta_2 = 0$ auf dem 1%-Niveau verworfen?
   a) Ja   b) Nein   c) keine Aussage möglich

5) Welches der folgenden Intervalle ist ein exaktes zweiseitiges 95% Vertrauensintervall für β_2?
   a) $0.468 \pm 1.987 \cdot \frac{0.181}{\sqrt{90}}$ b) $0.468 \pm 1.96 \cdot \frac{0.181}{\sqrt{90}}$
   c) $0.468 \pm 1.987 \cdot 0.181$ d) $0.468 \pm 1.96 \cdot 0.181$

6) Wird die Nullhypothese $H_0 : \beta_3 = 0$ auf dem 5%-Niveau verworfen?
   a) Ja   b) Nein   c) keine Aussage möglich

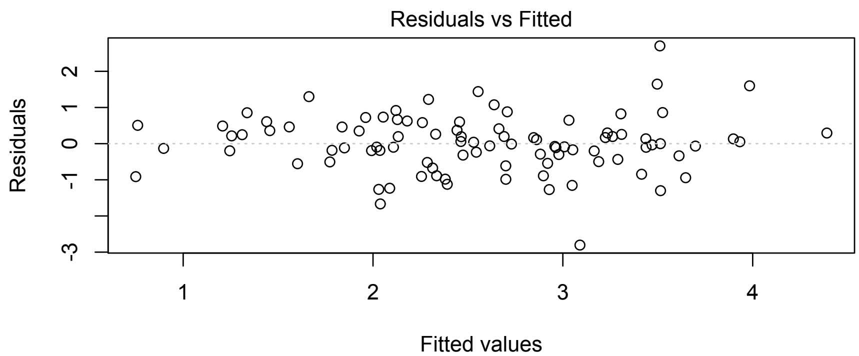
7) Betrachten Sie die Plots. Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend?
   a) Die Modellannahmen über die Fehler sind exakt erfüllt.

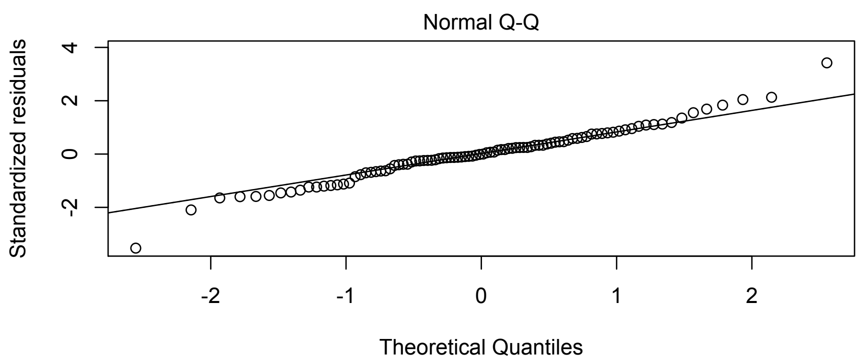
b) Die Modellannahmen über die Fehler scheinen plausibel. Es gibt aber Ausreisserpunkte.

c) Die Normalitätsannahme der Fehler scheint grob verletzt zu sein, aber die Annahme der konstanten Varianz ist plausibel.

d) Die Annahme der konstanten Varianz schein grob verletzt zu sein, aber die Normalitätsannahme der Fehler ist plausibel.

e) Die Fehler scheinen nicht unabhängig zu sein.





4. (6 Punkte)

1) Die Zufallsvariable X ist Poisson(λ)-verteilt mit $\lambda = 3$. Welche der folgenden Aussage ist richtig?

   a) $\mathbf{E}\left[\frac{1}{3}X\right] = 1$, $\text{Var}\left(\frac{1}{3}X\right) = \frac{1}{3}$
   b) $\mathbf{E}\left[\frac{1}{3}X\right] = 1$, $\text{Var}\left(\frac{1}{3}X\right) = 1$
   c) $\mathbf{E}\left[\frac{1}{3}X\right] = 3$, $\text{Var}\left(\frac{1}{3}X\right) = 1$
   d) $\mathbf{E}\left[\frac{1}{3}X\right] = 3$, $\text{Var}\left(\frac{1}{3}X\right) = \frac{1}{3}$
   e) Keine der Antworten a) - d) trifft zu

2) Eine Zufallsvariable X hat folgende kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{3}x^2) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

   Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet dann

   a) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{3}x^2) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{2}{3}x) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x\exp(-\frac{1}{3}x^2) & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
   d) Keine der Antworten a) - c) trifft zu

3) Berechnen Sie den Median von X aus Teilaufgabe 3).

   a) $\sqrt{3\ln 2}$ b) $3\ln 2$ c) $\frac{1}{3}\ln 2$
   d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) Keine der Antworten a) - e) trifft zu

4) Gegeben sei eine Zufallsvariable $X \sim \text{Binomial}(n, \pi)$, wobei $n = 200$ und $\pi = 0.01$. Welche Approximation eignet sich am besten für die Verteilung von X?

   a) Poisson-Verteilung
   b) Normal-Verteilung
   c) Exponential-Verteilung

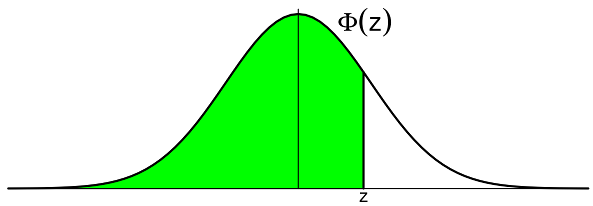
5) Die SBB kontrolliert regelmässig ihre Wagons. Welche Verteilung sollte sie am ehesten verwenden zur Beschreibung der Zeit bis ein Rad bricht?

   a) Poisson-Verteilung b) Binomial-Verteilung
   c) Uniforme Verteilung d) Normal-Verteilung
   e) t-Verteilung f) Exponential-Verteilung

6) Das zu einem t-Test gehörende Vertrauensintervall für μ sei $(-\infty, 1.32]$. Welche Form hatte die Alternativhypothese?

   a) $H_A : \mu < \mu_0$ b) $H_A : \mu > \mu_0$
   c) $H_A : \mu \neq \mu_0$ d) Keine Aussage möglich

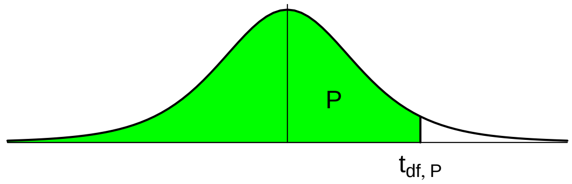
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\,[Z \leq z]\,,\ \ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\,[Z \leq 1.96] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576