Bachelorprüfung: Statistik (1 Stunde)

Bemerkungen:

- Es sind alle mitgebrachten schriftlichen Hilfsmittel und der Taschenrechner erlaubt.
- Natels sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet! Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.
- Wenn nicht anders vermerkt, sind die Tests auf dem 5%-Niveau durchzuführen.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Bei den Aufgaben 1 und 2 muss der Lösungsweg ersichtlich sein, sonst gibt es keine Punkte.
- Aufgaben 3 und 4 sind Multiple-Choice-Aufgaben. Es ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Eine korrekte Antwort gibt 1 **Plus**punkt und eine falsche Antwort $\frac{1}{2}$ **Minus**punkt. Minimal erhält man für eine ganze Multiple-Choice Aufgabe 0 Punkte. Tragen Sie die korrekten Antworten der Multiple Choice Aufgaben mit Kreuzchen in das separate Antwortblatt ein.

Viel Erfolg!

1. (6.5 Punkte)

Martin liest leidenschaftlich gerne Bücher. Seine Bücher kauft er mehrheitlich in den Buchhandlungen A und B. Er hat den Verdacht, dass die Buchhandlung A im Allgemeinen Taschenbücher teurer anbietet. Um dies zu prüfen geht er zuerst in die Buchhandlung A, wählt dort zufällig 15 Taschenbücher aus und notiert sich deren Preise. Danach geht er in die Buchhandlung B, wählt dort wiederum zufällig 15 Taschenbücher aus und notiert sich die Preise.

Die Preise (in CHF) der Taschenbücher aus Buchhandlung A sind $X_1, \ldots, X_{15}$, mit Durchschnitt $\bar{X}$ und Varianz $\hat{\sigma}_X^2$. Entsprechend werden die Preise der Taschenbücher aus Buchhandlung B mit $Y_1, \ldots, Y_{15}$ bezeichnet, mit Durchschnitt $\bar{Y}$ und Varianz $\hat{\sigma}_Y^2$. Ferner nehmen wir an, die Messdaten seien jeweils unabhängig voneinander und normalverteilt: die X_i als $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$ und die Y_i als $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Martin berechnet folgende Werte:

$\bar{X}$	18
$\hat{\sigma}_X^2$	12.3
$\bar{Y}$	15.2
$\hat{\sigma}_Y^2$	11.5

a) Muss Martin einen gepaarten oder einen ungepaarten Test durchführen? (Begründen Sie!)

b) Geben Sie die Null- und Alternativhypothese an.

c) Führen Sie einen t-Test auf dem 5% Niveau durch und formulieren Sie den Testentscheid.

d) Berechnen Sie das einseitige 95%-Vertrauensintervall für die Differenz $\mu_X - \mu_Y$.

2. (9 Punkte)

Das Unternehmen *Fine Waters* stellt das Mineralwasser *Fresh* her. Bei der maschinellen Abfüllung und Etikettierung der Flaschen kommt es immer wieder vor, dass einige Flaschen kleine Mängel aufweisen (z.B. falsches Abfüllvolumen oder nicht lesbare Etiketten). Solche Flaschen können nicht verkauft werden und müssen weggeworfen werden.

Nehmen Sie an, dass eine Flasche mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% einen Mangel aufweist.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 produzierten Flaschen genau drei einen Mangel aufweisen?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 produzierten Flaschen die ersten drei einen Mangel aufweisen?

Ein Ingenieur des Unternehmens möchte wissen, wie effizient die maschinelle Abfüllung und Etikettierung funktioniert. Dazu nimmt er eine Stichprobe von 150 Flaschen.

c) Welche Verteilung besitzt die Anzahl der Flaschen mit Mangel? Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz dieser Verteilung.

d) Verwenden Sie die Normal-Approximation zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass 15 bis 20 Flaschen weggeworfen werden müssen.

Der Ingenieur untersucht die 150 Flaschen. Er stellt fest, dass 20 Flaschen einen Mangel aufweisen. Ist diese Häufigkeit vereinbar mit der bisher angenommenen Hypothese, dass durchschnittlich 10% der Flaschen einen Mangel aufweisen?

e) Führen Sie dazu einen zweiseitigen Test auf dem 5% Niveau durch. Geben Sie die Null- und Alternativhypothese, die Teststatistik sowie den Testentscheid an. Benutzen Sie die Normal-Approximation.

3. (9 Punkte)

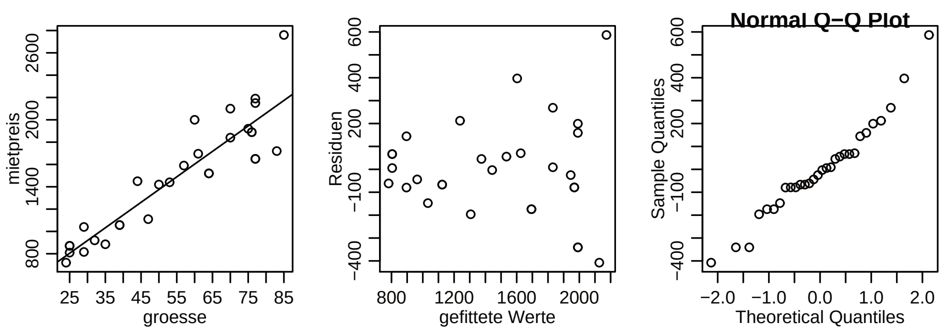
Fabio will ein Reisebüro eröffnen. Dazu analysiert er das Angebot an Büroräumlichkeiten in Zürich mit einer linearen Regression. Als erklärende Variable x wählt er die Bürogrösse in m^2 und die Zielvariable y ist der Mietpreis in $SFr.$. Das Modell ist

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right) \quad \text{i.i.d. .}$$

Hier sind der R-Output und Plots:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       ??         ??   2.075   0.0473
x              22.81       1.93      ?? 2.13e-12

Residual standard error: 213.6 on 28 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.833,Adjusted R-squared: 0.8271
F-statistic: 139.7 on 1 and 28 DF,  p-value: 2.131e-12
```



1) Mit wievielen Beobachtungen wurde die Regression berechnet?
   a) 22 b) 23 c) 28 d) 30 e) 29

2) Wie gross ist der Achsenabschnitt (Intercept) $\hat{\beta}_0$?
   a) 234 b) 728 c) 0 d) 1485

3) Wie gross ist die t-Teststatistik für den Test der Nullhypothese $H_0 : \beta_1 = 0$ (die Alternativhypothese ist $H_A : \beta_1 \neq 0$)?
   a) 22.81 b) 1.93 c) 11.819
   d) 139.7 e) 43.87 f) Keine Aussage möglich

4) Wird $H_0 : \beta_1 = 0$ auf dem 5% Niveau verworfen (die Alternative ist $H_A : \beta_1 \neq 0$)?
   a) Ja b) Nein c) Keine Aussage möglich

5) Welches der folgenden Intervalle ist ein exaktes zweiseitiges 95% Vertrauensintervall für β_1?
   a) $22.81 \pm 1.96 \cdot \frac{1.93}{\sqrt{28}}$ b) $22.81 \pm 2.048 \cdot \frac{1.93}{\sqrt{28}}$
   c) $22.81 \pm 1.96 \cdot 1.93$ d) $22.81 \pm 2.048 \cdot 1.93$

6) Fabio hätte gerne ein $70m^2$ grosses Büro. Welchen Preis kann er im Mittel erwarten?
   a) $70 \cdot 22.81$ b) $70 \cdot 22.81 - \hat{\beta}_0$
   c) $70 \cdot 22.81 + \hat{\beta}_0$ d) $139.7 + 70 \cdot 22.81$

7) Betrachte die gezeigten Plots. Welche der nachfolgenden Aussagen ist zutreffend?
   a) Nur die Annahme der konstanten Varianz der Fehler ϵ_i scheint verletzt zu sein.

b) Nur die Normalitätsannahme der Fehler ϵ_i scheint grob verletzt zu sein.

c) Die Modellannahmen über die Fehler scheinen plausibel.

d) Die Normalitätsannahme der Fehler ϵ_i und die Annahme der konstanten Varianz der Fehler ϵ_i scheinen grob verletzt zu sein.

8) Was passiert mit der Regression, wenn an der Stelle $(80, 3000)$ noch eine Beobachtung hinzugefügt wird?

a) $\hat{\beta}_1$ wird kleiner, $\hat{\sigma}$ wird kleiner.

b) $\hat{\beta}_1$ wird kleiner, $\hat{\sigma}$ wird grösser.

c) $\hat{\beta}_1$ wird grösser, $\hat{\sigma}$ wird kleiner.

d) $\hat{\beta}_1$ wird grösser, $\hat{\sigma}$ wird grösser.

e) Keine Aussage möglich.

9) Was passiert mit der t-Teststatistik für β_1, wenn an der Stelle $(80, 1000)$ noch eine Beobachtung hinzugefügt wird?

a) Sie bleibt gleich

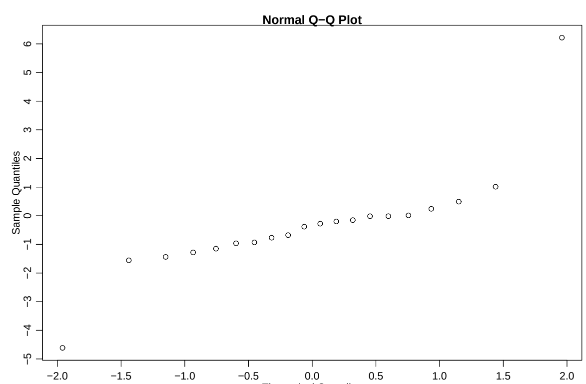
b) Sie wird kleiner

c) Sie wird grösser

d) Keine Aussage möglich

4. (5 Punkte)

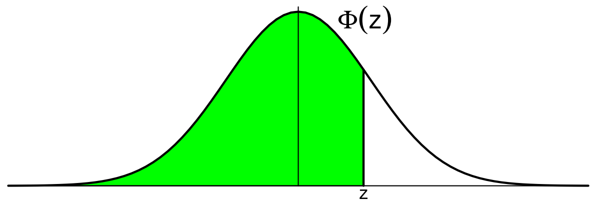
1) Zwei Statistiker A und B berechnen mittels zweier verschiedener Datensätze (unterschiedliche Anzahl Beobachtungen) das 95% Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen X. Beide verwenden die Annahme, dass X normalverteilt ist, und dass $\text{Var}(X) = 25$ bekannt ist. Der Statistiker A erhält als Konfidenzintervall $(9.36, 11.63)$, der Statistiker B erhält $(9.02, 10.98)$. Welcher der beiden Statistiker benutzt den Datensatz mit grösserer Anzahl Beobachtungen?
   a) Statistiker A
   b) Statistiker B
   c) Statistiker A und B benutzten dieselbe Anzahl Beobachtungen
   d) Keine Aussage ist möglich
2) Welche der folgenden Verteilungen beschreibt die Anzahl des Eintretens seltener Ereignisse innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls?
   a) Normalverteilung b) Binomialverteilung
   c) Exponentialverteilung d) Poisson-Verteilung
3) Welche der folgenden Aussagen verkleinert die Macht eines Tests?
   a) Vergrösserung des Fehlers 2. Art
   b) Vergrösserung des Signifikanzniveaus
   c) Vergrösserung der Anzahl Beobachtungen
4) Es sei $X \sim \text{Exp}(1/500)$. Was ist der Median von X?
   a) 500 b) 500^2 c) $1/500$
   d) $500 \cdot \ln(2)$ e) $\ln(2)/500$ f) Aussagen a) bis e) sind falsch
5) Von einer Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ wurden Daten gesammelt. Ein Normal-Plot der Daten ist unten aufgezeichnet. Wir möchten die folgende Hypothese auf dem 5% Niveau testen: $H_0 : \mu = 0$, $H_A : \mu \neq 0$.



Der P-Wert des t-Tests mit diesen Daten ist 0.4614. Mit dem Wilcoxon-Test erhält man 0.0400 als P-Wert. Welche der folgenden Aussagen ist zutreffend?

   a) Der Wilcoxon-Test ist vorzuziehen und die Nullhypothese wird verworfen.
   b) Der Wilcoxon-Test ist vorzuziehen und die Nullhypothese wird nicht verworfen.
   c) Der t-Test ist vorzuziehen und die Nullhypothese wird verworfen.
   d) Der t-Test ist vorzuziehen und die Nullhypothese wird nicht verworfen.

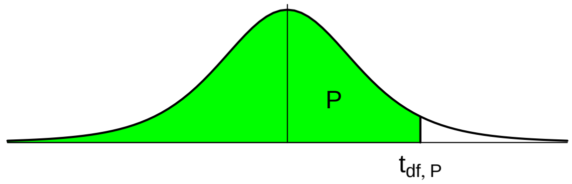
Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \le z\right],\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \le 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Perzentile der t-Verteilung



Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576