# Schriftliche Prüfung
# (2 Stunden)

**Bemerkungen:**

- Alle Unterlagen (Skripte, Bücher, weitere Ausdrucke, etc.) sowie Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit sind erlaubt.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Die nötige Tabelle befindet sich auf der hintersten Seite dieser Prüfung.
- Der Lösungsweg für eine Textaufgabe muss klar ersichtlich sein. Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.
- Multiple-Choice Teilaufgaben bestehen aus mehreren Aussagen. Pro Teilaufgabe kann keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein. Für jede Aussage gibt es 1/2 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1/2 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen. Keine Teilaufgabe kann mit negativer Punktzahl abgeschlossen werden. Minimal erhält man also für eine ganze Teilaufgabe 0 Punkte.
- Aufgaben 1, 2 und 3 sind Textaufgaben. Schreiben Sie Ihre Antworten zu diesen Aufgaben auf eigene Blätter und nicht auf das Aufgabenblatt. Benutzen Sie für jede Aufgabe separate Blätter.
- Aufgabe 4 ist eine Mischung aus Textaufgabe und Multiple-Choice. Die Teilaufgaben a) bis c) sind Textaufgaben, die Teilaufgabe d) ist eine Multiple-Choice Aufgabe. Beantworten Sie die Textaufgabenteile auf einem eigenen Blatt. Die Antwort zum Multiple-Choice Teil muss direkt auf dem Aufgabenblatt angekreuzt werden und darf *nicht* auf ein separates Blatt übertragen werden.
- Aufgabe 5 ist eine reine Multiple-Choice Aufgabe. Die Antworten müssen direkt auf dem Aufgabenblatt angekreuzt werden und dürfen *nicht* auf ein separates Blatt übertragen werden.

# Viel Erfolg!

1. (**7 Punkte**) Der Handyhersteller "Banana" bemerkt, dass es bei 92% seiner verkauften Geräte zu einer Überhitzung kommen kann. Das Ereignis eines fehlerfreien Handys nennen wir $F$ ("functional"), das Ereignis eines defekten Gerätes $D$ ("disfunctional"). Die Firma versendet an alle Kunden ein kleines Programm, das herausfinden soll, ob das Handy einwandfrei ist und das Ergebnis zurück zu Banana sendet. Bei diesem Software-Test bedeutet das Ereignis $W$, dass der Test einen Fehler vermutet ("Warning!") und $NW$, dass er vermutet, das Handy sei ok ("No Warning"). Der Test erfüllt folgende Eigenschaft:

$$P(NW \mid F) = 0.9\,.$$

Zudem beobachtet man, dass der Test in 85% aller Fälle eine Warnung zurück zur Firma Banana sendet.

Geben Sie bei dieser Aufgabe immer die Formeln mit an und rechnen Sie mit drei Stellen hinter dem Komma.

**a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(W \mid F)$, $P(W \mid D)$ und $P(NW \mid D)$.
*Hinweis:* Verwenden Sie bei $P(W \mid D)$ z.B. den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für $P(W)$.
Ersatzresultate: $P(W \mid F) = 0.1$, $P(W \mid D) = 0.915$ und $P(NW \mid D) = 0.085$.

**b)** Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Handy in Ordnung ist, falls der Test nichts zu beanstanden hat.

**c)** Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Handy fehlerhaft ist, falls das Testergebnis eine Warnung ausgibt (benutzen Sie $P(W \mid D) = 0.915$).

**d)** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Handy defekt ist und der Test keine entsprechende Warnung ausgibt?

**e)** Nehmen Sie an, dass die Testergebnisse von verschiedenen Handys unabhängig sind und nacheinander in der "Banana"-Zentrale bearbeitet werden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst der fünfte bearbeitete Test keine Warnung ausgibt? Was ist die erwartete Anzahl der Tests, die man abwarten muss, bis man ein Ergebnis ohne Warnung bekommt?

**2. (9 Punkte)** In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit Verteilungen. Wir modellieren die Schadensgrösse $X$ eines Versicherungsereignisses (in Franken) mit einer Verteilung mit folgender Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter ist.

**a)** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis einen Schaden von exakt 1 Franken verursacht?

**b)** Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion.
*Hinweis:* Partielle Integration.

**c)** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden zwischen 1 und 2 Franken entsteht, wenn $\lambda = 1$ ist?

**d)** Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 unabhängigen Schäden mit obiger Verteilung für $\lambda = 1$ mindestens einer zwischen 1 und 2 liegt?
Verwenden Sie als Resultat von c) 0.3, falls Sie diese Aufgabe nicht gelöst haben.

**e)** Mit welcher Verteilungsfamilie kann man die Summe von 100 unabhängigen Schäden mit obiger Verteilung approximieren? Was sind die Parameter dieser Verteilung, wenn $\lambda$ so gewählt ist, dass ein einzelner Schaden Erwartungswert 1 und Varianz 0.5 hat?

**f)** Es seien $X$ und $Y$ zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f_X(x)$ wie am Anfang der Aufgabe. Was ist die Dichte der Zufallsvariable $Z = \max(X, Y)$?
Es reicht, wenn Sie die Dichte $f_Z(x)$ durch $f_X(x)$ und $F_X(x)$ ausdrücken.

**3.** (**8 Punkte**) In dieser Aufgabe geht es um Parameterschätzung. Wir betrachten eine stetige Verteilung mit folgender Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Wir wollen den Parameter $\alpha$ aus einer Stichprobe schätzen.

**a)** Bestimmen Sie die Likelihood- und die Loglikelihoodfunktion basierend auf $n$ unabhängigen identisch verteilten Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ einer Zufallsvariablen mit obiger Dichte.

**b)** Bestimmen Sie den zugehörigen Maximum-Likelihood Schätzer für $\alpha$. Schreiben Sie zuerst die allgemeine Formel für $n$ Beobachtungen hin und berechnen Sie den Schätzer dann für die folgende konkrete Stichprobe:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 12.0 | 4.0 | 6.9 | 27.9 | 15.4 |

**c)** Bestimmen Sie den Momentenschätzer für $\alpha$, wieder zuerst allgemein basierend auf $n$ unabhängigen Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ und dann für obige Stichprobe. *Hinweise:* Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X$ mit obiger Dichte $f$ ist

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Für $\alpha \leq 1$ ist der Erwartungswert gleich $\infty$ und der Momentenschätzer ist nicht definiert. Sie müssen für diese Teilaufgabe also annehmen, dass $\alpha > 1$.

**d)** Vergleichen Sie den Maximum-Likelihood und den Momentenschätzer für obige Stichprobe. Ist der Momentenschätzer hier sinnvoll?

**4.** (**9 Punkte**) Eine Brücke soll aufgrund des höheren Verkehrsaufkommens renoviert werden. Im Bau wurden damals Schrauben mit einer mittleren Festigkeit von 500 $N/mm^2$ benutzt. Da dies für nicht mehr sicher genug gehalten wird, sollen diese nun durch Schrauben mit einer mittleren Festigkeit von mehr als 500 $N/mm^2$ ersetzt werden. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, hat der alte Schraubenlieferant ein neues Verfahren entwickelt. Zur Baustelle werden allerdings unbeschriftete Schrauben geliefert, aus denen nicht sofort hervorgeht, ob es sich um die alten 500er oder um die neuen verbesserten Schrauben handelt. Vor dem Verbau will der leitende Ingenieur zuerst sicherstellen, dass es sich um die besseren Schrauben handelt. Um dies herauszufinden, werden einige der Schrauben vermessen und ein statistischer Test durchgeführt. Je nach Ergebnis sollen die Schrauben verbaut oder zurückgeschickt werden.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Schraubenfestigkeit ($X_i$) | 520 | 512 | 499 | 524 | 505 |

Für empirischen Mittelwert und empirische Varianz ergeben sich bei obiger Stichprobe $\overline{x} = 512$ und $s^2 = 106.5$.

Wir modellieren die Daten mit einer Normalverteilung, d.h. $X_i$ iid $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

**a)** Stellen Sie die geeigneten Null- und Alternativhypothesen auf und begründen Sie Ihre Wahl.

**b)** Sie führen nun einen einseitigen $t$-Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch (unabhängig von Ihrer obigen Antwort).
Stellen Sie die Teststatistik $T$ auf und berechnen Sie deren Wert. Geben Sie die Verteilung der Teststatistik $T$ unter $H_0$ und den Verwerfungsbereich des Tests an. Was ist der Testentscheid?

**c)** Berechnen Sie ein (zweiseitiges) 95%-Vertrauensintervall für $\mu$. Wie würde das entsprechende Vertrauensintervall aussehen, wenn wir die Streuung als bekannt voraussetzen würden (mit dem gleichen Wert wie der beobachtete)?

**d)** Betrachten Sie (unabhängig von dem oben aufgeführten Beispiel) einen einseitigen $t$-Test von $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_A : \mu > 0$ zum Niveau 0.05. Obwohl die beobachteten $n$ Datenpunkte einen empirischen Mittelwert grösser Null haben, ergeben die Berechnungen, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • Man verwirft $H_0$ für kein Niveau $\alpha < 0.05$. | ◯ | ◯ |
| • Es gibt ein Niveau $\alpha < 1$, bei dem man $H_0$ verwirft. | ◯ | ◯ |
| • Der p-Wert ist strikt kleiner als 0.5. | ◯ | ◯ |
| • Führt man statt eines einseitigen einen zweiseitigen Test zum Niveau 0.05 durch, verwirft man $H_0$ nicht. | ◯ | ◯ |
| • Wenn man die Daten immer öfter kopiert (d.h., man betrachtet jeden Datenpunkt $k$-Mal, sodass man insgesamt $k \cdot n$ Datenpunkte erhält), verwirft man $H_0$ für ein großes $k$ beim Niveau 0.05. | ◯ | ◯ |

**5.** (**12 Punkte**)

**a)** Die Ereignisse $A$ und $B$ seien disjunkt und $P(A) > 0$ sowie $P(B) > 0$. Dann gilt in diesem Fall

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • $P(A^c \cap B) > P(B)$ | ◯ | ◯ |
| • $1 - P(A^c \cup B^c) > P(B)$ | ◯ | ◯ |
| • $P(A \mid B) > P(A)$ | ◯ | ◯ |
| • $P(B \mid A) = 0$ | ◯ | ◯ |

**b)** Betrachten Sie folgende Aussagen zu stetigen Zufallsvariablen.

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • Wenn die Dichte einer Zufallsvariablen $X$ symmetrisch ist, dann ist der Median zwingenderweise gleich dem Erwartungswert. | ◯ | ◯ |
| • Wenn wir $\text{Cov}(X, Y)$ und die Randdichten von $X$ und $Y$ kennen, dann können wir immer die gemeinsame Dichte von $(X, Y)$ bestimmen. | ◯ | ◯ |
| • Wenn $X$ normalverteilt ist mit $E[X] = 0$, dann gilt $$P(X \geq a) > P(X \leq -a - 1)$$ für alle $a > 0$. | ◯ | ◯ |
| • Der Erwartungswert der Zufallsvariable $X$ mit kumulativer Verteilungsfunktion $$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$ ist $\frac{2}{3}$. | ◯ | ◯ |

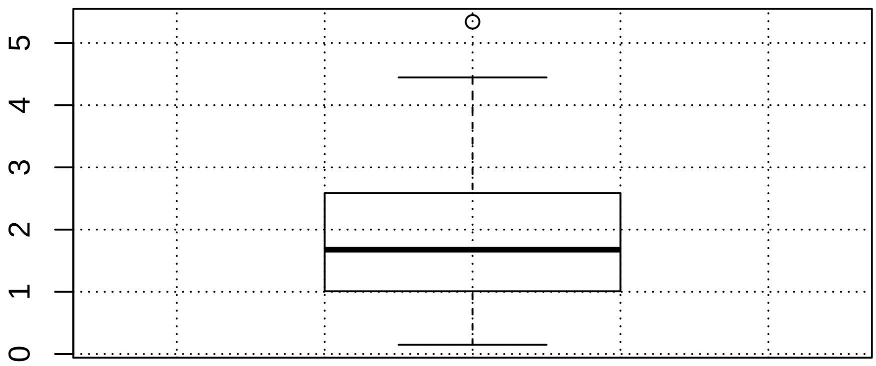
**c)** Betrachten Sie folgende allgemeine Aussagen zu statistischen Tests und Vertrauensintervallen.

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • Wenn $[-0.001, 3.001]$ ein 95%-Vertrauensintervall für einen Parameter $\mu$ ist, dann verwirft der zugehörige Test die Nullhypothese $\mu = 0$ auf dem 5%-Niveau nicht. | ◯ | ◯ |
| • Anhand des p-Werts können wir immer den Testentscheid ablesen. | ◯ | ◯ |
| • Statistische Signifikanz ist immer mit fachlicher Relevanz gleichzusetzen. | ◯ | ◯ |
| • Die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art addieren sich immer zu 1. | ◯ | ◯ |

**d)** Es sei $X \sim \text{Poisson}(10)$ und $Z = 2X$. Dann gilt:

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • $Z \sim \text{Poisson}(20)$. | ◯ | ◯ |
| • $\text{Var}(Z) = 40$. | ◯ | ◯ |
| • Die Korrelation zwischen $X$ und $Z$ ist 0. | ◯ | ◯ |
| • $E[Z] = 20$. | ◯ | ◯ |

**e)** Betrachten Sie folgenden Boxplot einer Stichprobe mit 100 (verschiedenen) Beobachtungen.



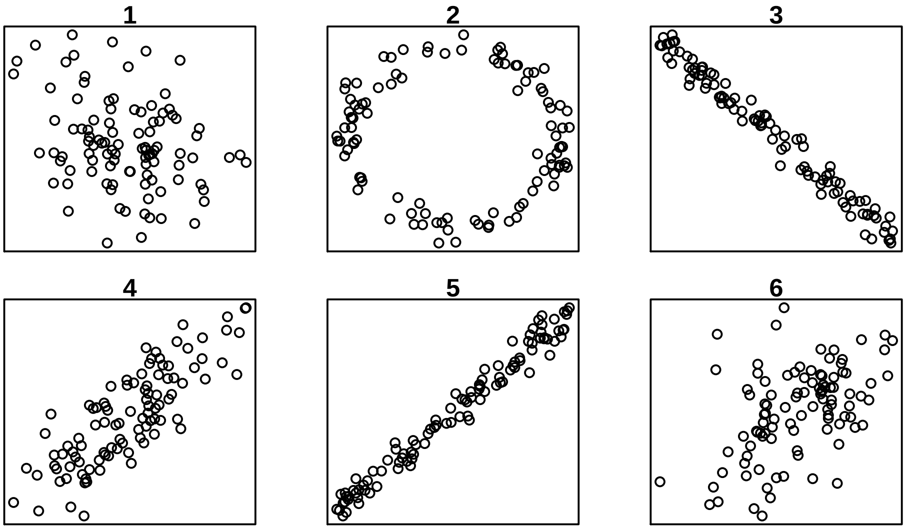

| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • Weniger als die Hälfte der Werte ist grösser als 2. | ◯ | ◯ |
| • Mindestens 10% der Werte sind kleiner als 1. | ◯ | ◯ |
| • Nur eine Beobachtung ist grösser als 5. | ◯ | ◯ |
| • Der Erwartungswert ist grösser als der Median. | ◯ | ◯ |

**f) Siehe nächstes Blatt!**

**f)** Ordnen Sie die unteren sechs Scatterplots den Korrelationen

$$a = -0.05 \qquad b = -0.29 \qquad c = 0.83$$
$$d = -0.99 \qquad e = 0.99 \qquad f = 0.49$$

zu.




| | Richtig | Falsch |
|---|---|---|
| • 1b, 2a | ◯ | ◯ |
| • 2b, 3d | ◯ | ◯ |
| • 4c, 6f | ◯ | ◯ |
| • 3d, 5e | ◯ | ◯ |

## Quantile der t-Verteilung

Bsp.: $t_{9;\ 0.975} = 2.262$

| $df$ | $t_{0.60}$ | $t_{0.70}$ | $t_{0.80}$ | $t_{0.90}$ | $t_{0.95}$ | $t_{0.975}$ | $t_{0.99}$ | $t_{0.995}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 |
| 9 | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.257 | 0.533 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.257 | 0.532 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.256 | 0.531 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.256 | 0.531 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.256 | 0.530 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |
| 31 | 0.255 | 0.530 | 0.853 | 1.309 | 1.696 | 2.040 | 2.452 | 2.744 |
| 32 | 0.255 | 0.530 | 0.853 | 1.309 | 1.694 | 2.037 | 2.449 | 2.738 |
| 33 | 0.255 | 0.530 | 0.853 | 1.308 | 1.693 | 2.035 | 2.445 | 2.733 |
| 34 | 0.255 | 0.529 | 0.852 | 1.307 | 1.691 | 2.032 | 2.441 | 2.728 |
| 35 | 0.255 | 0.529 | 0.852 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 |
| 40 | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 60 | 0.254 | 0.527 | 0.848 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 90 | 0.254 | 0.526 | 0.846 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2.368 | 2.632 |
| 120 | 0.254 | 0.526 | 0.845 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 |
| $\infty$ | 0.253 | 0.524 | 0.842 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |