

Musterlösung

1. (7 Punkte) Der Handyhersteller “Banana” bemerkt, dass es bei 92% seiner verkauften Geräte zu einer Überhitzung kommen kann. Das Ereignis eines fehlerfreien Handys nennen wir F (“functional”), das Ereignis eines defekten Gerätes D (“disfunctional”). Die Firma versendet an alle Kunden ein kleines Programm, das herausfinden soll, ob das Handy einwandfrei ist und das Ergebnis zurück zu Banana sendet. Bei diesem Software-Test bedeutet das Ereignis W , dass der Test einen Fehler vermutet (“Warning!”) und NW , dass er vermutet, das Handy sei ok (“No Warning”). Der Test erfüllt folgende Eigenschaft:

$$P(NW | F) = 0.9.$$

Zudem beobachtet man, dass der Test in 85% aller Fälle eine Warnung zurück zur Firma Banana sendet.

Geben Sie bei dieser Aufgabe immer die Formeln mit an und rechnen Sie mit drei Stellen hinter dem Komma.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(W | F)$, $P(W | D)$ und $P(NW | D)$.
Hinweis: Verwenden Sie bei $P(W | D)$ z.B. den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für $P(W)$.
 Ersatzresultate: $P(W | F) = 0.1$, $P(W | D) = 0.915$ und $P(NW | D) = 0.085$. Es gilt $P(F) = 1 - P(D) = 0.08$ und $P(NW) = 1 - P(W) = 1 - 0.85 = 0.15$.

$$P(W | F) = 1 - P(NW | F) = 0.1 \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

$$\begin{aligned} P(W | D) &= \frac{P(W) - P(W | F) \cdot P(F)}{P(D)} \\ &= \frac{0.85 - 0.1 \cdot 0.08}{0.92} \approx 0.915 \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

$$P(NW | D) = 1 - P(W | D) \approx 0.085 \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

- b) Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Handy in Ordnung ist, falls der Test nichts zu beanstanden hat.

$$P(F | NW) = \frac{P(NW | F) \cdot P(F)}{P(NW)} = \frac{0.9 \cdot 0.08}{0.15} = 0.48 \quad (1 \text{ Punkt})$$

- c) Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass ein Handy fehlerhaft ist, falls das Testergebnis eine Warnung ausgibt (benutzen Sie $P(W | D) = 0.915$).

$$P(D | W) = \frac{P(W | D) \cdot P(D)}{P(W)} = \frac{0.915 \cdot 0.92}{0.85} \approx 0.990 \quad (1 \text{ Punkt})$$

- d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Handy defekt ist und der Test keine entsprechende Warnung ausgibt?

$$P(D \cap NW) = P(NW | D) \cdot P(D) = 0.085 \cdot 0.92 \approx 0.0782 \quad (1 \text{ Punkt})$$

- e) Nehmen Sie an, dass die Testergebnisse von verschiedenen Handys unabhängig sind und nacheinander in der "Banana"-Zentrale bearbeitet werden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst der fünfte bearbeitete Test keine Warnung ausgibt? Was ist die erwartete Anzahl der Tests, die man abwarten muss, bis man ein Ergebnis ohne Warnung bekommt? Sei X die Anzahl der angeschauten Testergebnisse bis zum ersten Ergebnis ohne Warnung. Dann ist X geometrisch verteilt mit Parameter 0.15. Es gilt

$$P(X = 5) = 0.15 \cdot 0.85^4 \approx 0.078 \quad (1 \text{ Punkt})$$

und

$$E(X) = 1/0.15 \approx 6.667 \quad (1 \text{ Punkt})$$

2. (9 Punkte) In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit Verteilungen. Wir modellieren die Schadensgröße X eines Versicherungsereignisses (in Franken) mit einer Verteilung mit folgender Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter ist.

- a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis einen Schaden von exakt 1 Franken verursacht? (1 Punkt)
0, denn für jede stetige Verteilung gilt $P[X = x] = 0$.
- b) Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion.
Hinweis: Partielle Integration. (2 Punkte)
Mit partieller Integration erhalten wir

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

- c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden zwischen 1 und 2 Franken entsteht, wenn $\lambda = 1$ ist?
(1 Punkt) Entweder mit Integration der Dichte oder mit Einsetzen der kumulativen Verteilungsfunktion erhalten wir

$$P[1 \leq X \leq 2] = F(2) - F(1) = 2e^{-1} - 3e^{-2} \approx 0.33.$$

- d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 unabhängigen Schäden mit obiger Verteilung für $\lambda = 1$ mindestens einer zwischen 1 und 2 liegt?
Verwenden Sie als Resultat von c) 0.3, falls Sie diese Aufgabe nicht gelöst haben.
(1 Punkt) Jeder Schaden liegt mit Wahrscheinlichkeit $p = 2e^{-1} - 3e^{-2}$ zwischen 1 und 2. Da die 10 Schäden unabhängig sind, folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mindesten einer zwischen 1 und 2, sich wie folgt berechnet

$$1 - (1 - p)^{10} = 1 - (1 - 2e^{-1} - 3e^{-2})^{10} \approx 0.98.$$

- e) Mit welcher Verteilungsfamilie kann man die Summe von 100 unabhängigen Schäden mit obiger Verteilung approximieren? Was sind die Parameter dieser Verteilung, wenn λ so gewählt ist, dass ein einzelner Schaden Erwartungswert 1 und Varianz 0.5 hat?
(2 Punkte) Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt, dass die Summe von 100 unabhängigen Schäden mit einer Normalverteilung approximiert werden kann. Wenn ein einzelner Schaden Erwartungswert 1 und Varianz 0.5 hat, so hat diese Normalverteilung Erwartungswert $100 \cdot 1 = 100$ und Varianz $100 \cdot 0.5 = 50$.

- f) Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f_X(x)$ wie am Anfang der Aufgabe. Was ist die Dichte der Zufallsvariable $Z = \max(X, Y)$?

Es reicht, wenn Sie die Dichte $f_Z(x)$ durch $f_X(x)$ und $F_X(x)$ ausdrücken.

(2 Punkte) Für $x > 0$ gilt

$$f_Z(x) = \frac{d}{dx} P[Z \leq x] = \frac{d}{dx} P[\max(X, Y) \leq x] = \frac{d}{dx} P[X \leq x \& Y \leq x] = \frac{d}{dx} P[X \leq x] P[Y \leq x] = 2f_X(x)F_X(x).$$

Es folgt, dass

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 2f_X(x)F_X(x) & x > 0. \end{cases}$$

3. **(8 Punkte)** In dieser Aufgabe geht es um Parameterschätzung. Wir betrachten eine stetige Verteilung mit folgender Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Wir wollen den Parameter α aus einer Stichprobe schätzen.

- a) Bestimmen Sie die Likelihood- und die Loglikelihoodfunktion basierend auf n unabhängigen identisch verteilten Beobachtungen x_1, \dots, x_n einer Zufallsvariablen mit obiger Dichte.

$$\ell(\alpha; x_1, \dots, x_n) = \alpha^n \frac{1}{(\prod_{i=1}^n x_i)^{\alpha+1}}$$

$$\log \ell(\alpha; x_1, \dots, x_n) = n \log \alpha - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \log x_i$$

(2 Punkte)

- b) Bestimmen Sie den zugehörigen Maximum-Likelihood Schätzer für α . Schreiben Sie zuerst die allgemeine Formel für n Beobachtungen hin und berechnen Sie den Schätzer dann für die folgende konkrete Stichprobe:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
12.0	4.0	6.9	27.9	15.4

Ableiten und nullsetzen der Loglikelihood gibt

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i} \approx 0.4$$

(3 Punkte)

- c) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für α , wieder zuerst allgemein basierend auf n unabhängigen Beobachtungen x_1, \dots, x_n und dann für obige Stichprobe.

Hinweise: Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit obiger Dichte f ist

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \text{für } \alpha > 1.$$

Für $\alpha \leq 1$ ist der Erwartungswert gleich ∞ und der Momentenschätzer ist nicht definiert. Sie müssen für diese Teilaufgabe also annehmen, dass $\alpha > 1$.

Gleichsetzen von Erwartungswert und Stichprobenmittel, $\mathbf{E}[X] \stackrel{!}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, ergibt

$$\hat{\alpha}_{MoM} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - 1} \approx 1.1$$

(2 Punkte)

- d) Vergleichen Sie den Maximum-Likelihood und den Momentenschätzer für obige Stichprobe. Ist der Momentenschätzer hier sinnvoll? Der Momentenschätzer setzt $\alpha > 1$ voraus, was unplausibel erscheint, da der MLE deutlich kleiner als 1 ist.
(1 Punkt)

4. (9 Punkte) Eine Brücke soll aufgrund des höheren Verkehrsaufkommens renoviert werden. Im Bau wurden damals Schrauben mit einer mittleren Festigkeit von 500 N/mm^2 benutzt. Da dies für nicht mehr sicher genug gehalten wird, sollen diese nun durch Schrauben mit einer mittleren Festigkeit von mehr als 500 N/mm^2 ersetzt werden. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, hat der alte Schraubenlieferant ein neues Verfahren entwickelt. Zur Baustelle werden allerdings unbeschriftete Schrauben geliefert, aus denen nicht sofort hervorgeht, ob es sich um die alten 500er oder um die neuen verbesserten Schrauben handelt. Vor dem Verbau will der leitende Ingenieur zuerst sicherstellen, dass es sich um die besseren Schrauben handelt. Um dies herauszufinden, werden einige der Schrauben vermessen und ein statistischer Test durchgeführt. Je nach Ergebnis sollen die Schrauben verbaut oder zurückgeschickt werden.

	1	2	3	4	5
Schraubenfestigkeit (X_i)	520	512	499	524	505

Für empirischen Mittelwert und empirische Varianz ergeben sich bei obiger Stichprobe $\bar{x} = 512$ und $s^2 = 106.5$.

Wir modellieren die Daten mit einer Normalverteilung, d.h. $X_i \text{ iid } \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- a) Stellen Sie die geeigneten Null- und Alternativhypothesen auf und begründen Sie Ihre Wahl. Wir wählen $H_0 : \mu = 500$ als Nullhypothese (0,5 Punkte) und $H_A : \mu > 500$ als Alternativhypothese (0,5 Punkte).
Man möchte auf jeden Fall den Fehler "Es handelt sich um 500er Schrauben, doch wir denken, es seien die neuen verbesserten Schrauben." vermeiden, da dies im schlimmsten Fall zum Brückeneinsturz führen kann. Daher wird dies der Fehler 1. Art (0,5 Punkte).
Die Geschichte schließt $\mu < 500$ als Teil der Alternative aus. Die Alternative $H_A : \mu > 500$ führt zu mehr Power als $H_A : \mu \neq 500$ (eines der beiden "Argumente" reicht). (0,5 Punkte).
- b) Sie führen nun einen einseitigen t -Test zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch (unabhängig von Ihrer obigen Antwort).
Stellen Sie die Teststatistik T auf und berechnen Sie deren Wert. Geben Sie die Verteilung der Teststatistik T unter H_0 und den Verwerfungsbereich des Tests an. Was ist der Testentscheid? Die Teststatistik berechnet sich als

$$T = \sqrt{5} \frac{\hat{\mu} - 500}{S_5} \quad (0,5 \text{ Punkte}),$$

wobei $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^5 X_i$ emp. Mittelwert und $S_5^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 (X_i - \hat{\mu})^2$ die emp. Varianz ist.

In dem Bsp ergibt sich $T \approx 2.6$ (0,5 Punkte)

T ist t -verteilt mit vier Freiheitsgraden. (0,5 Punkte)

Der Verwerfungsbereich auf dem 5% Niveau ist gegeben durch

$$K = [2.132, \infty). \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Die Nullhypothese wird demnach abgelehnt (0,5 Punkte).

- c) Berechnen Sie ein (zweiseitiges) 95%-Vertrauensintervall für μ . Wie würde das entsprechende Vertrauensintervall aussehen, wenn wir die Streuung als bekannt voraussetzen würden (mit dem gleichen Wert wie der beobachtete)? Das zweiseitige Vertrauensintervall ist gegeben durch

$$VI := \left[\hat{\mu} - \frac{S_5 t_{n-1; 1-\alpha/2}}{\sqrt{5}} ; \hat{\mu} + \frac{S_5 t_{n-1; 1-\alpha/2}}{\sqrt{5}} \right] \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

Für obige Daten ergibt sich $VI \approx [499.1882 ; 524.8118]$. (0,5 Punkte).

Setzt man die Streuung σ als bekannt voraus, so ist das zweiseitige Vertrauensintervall gegeben durch

$$VI := \left[\hat{\mu} - \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{5}} ; \hat{\mu} + \frac{\sigma z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{5}} \right] \quad (0,5 \text{ Punkte})$$

wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $1 - \alpha$ -Quantil einer Standard-Normalverteilung ist. Für obige Daten ergibt sich dann $VI \approx [502.9544; 521.0456]$. (0,5 Punkte).

- d) Betrachten Sie (unabhängig von dem oben aufgeführten Beispiel) einen einseitigen t -Test von $H_0 : \mu = 0$ gegen $H_A : \mu > 0$ zum Niveau 0.05. Obwohl die beobachteten n Datenpunkte einen empirischen Mittelwert grösser Null haben, ergeben die Berechnungen, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- | | Richtig | Falsch |
|---|-----------------------|-----------------------|
| • Man verwirft H_0 für kein Niveau $\alpha < 0.05$. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Es gibt ein Niveau $\alpha < 1$, bei dem man H_0 verwirft. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Der p-Wert ist strikt kleiner als 0.5. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Führt man statt eines einseitigen einen zweiseitigen Test zum Niveau 0.05 durch, verwirft man H_0 nicht. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Wenn man die Daten immer öfter kopiert (d.h., man betrachtet jeden Datenpunkt k -Mal, sodass man insgesamt $k \cdot n$ Datenpunkte erhält), verwirft man H_0 für ein großes k beim Niveau 0.05. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

R, R, R, R, R

5. (12 Punkte)

- a) Die Ereignisse A und B seien disjunkt und $P(A) > 0$ sowie $P(B) > 0$. Dann gilt in diesem Fall

- | | Richtig | Falsch |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| • $P(A^c \cap B) > P(B)$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • $1 - P(A^c \cup B^c) > P(B)$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • $P(A B) > P(A)$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • $P(B A) = 0$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

F,F,F,R

- b) Betrachten Sie folgende Aussagen zu stetigen Zufallsvariablen.

- | | Richtig | Falsch |
|---|-----------------------|-----------------------|
| • Wenn die Dichte einer Zufallsvariablen X symmetrisch ist, dann ist der Median zwingenderweise gleich dem Erwartungswert. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Wenn wir $\text{Cov}(X, Y)$ und die Randdichten von X und Y kennen, dann können wir immer die gemeinsame Dichte von (X, Y) bestimmen. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Wenn X normalverteilt ist mit $E[X] = 0$, dann gilt | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

$$P(X \geq a) > P(X \leq -a - 1)$$

für alle $a > 0$.

- | | | |
|--|-----------------------|-----------------------|
| • Der Erwartungswert der Zufallsvariable X mit kumulativer Verteilungsfunktion | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
|--|-----------------------|-----------------------|

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

ist $\frac{2}{3}$.

R,F,R,F

c) Betrachten Sie folgende allgemeine Aussagen zu statistischen Tests und Vertrauensintervallen.

- | | Richtig | Falsch |
|--|-----------------------|-----------------------|
| • Wenn $[-0.001, 3.001]$ ein 95%-Vertrauensintervall für einen Parameter μ ist, dann verwirft der zugehörige Test die Nullhypothese $\mu = 0$ auf dem 5%-Niveau nicht. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Anhand des p-Werts können wir immer den Testentscheid ablesen. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Statistische Signifikanz ist immer mit fachlicher Relevanz gleichzusetzen. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| • Die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 1. und 2. Art addieren sich immer zu 1. | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

R,R,F,F

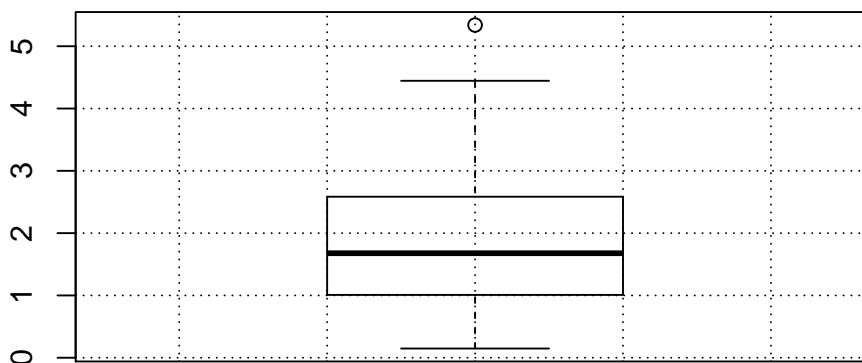
d) Es sei $X \sim \text{Poisson}(10)$ und $Z = 2X$. Dann gilt:

- $Z \sim \text{Poisson}(20)$.
- $\text{Var}(Z) = 40$.
- Die Korrelation zwischen X und Z ist 0.
- $E[Z] = 20$.

Richtig Falsch

F,R,F,R

e) Betrachten Sie folgenden Boxplot einer Stichprobe mit 100 (verschiedenen) Beobachtungen.



- Weniger als die Hälfte der Werte ist grösser als 2.
- Mindestens 10% der Werte sind kleiner als 1.
- Nur eine Beobachtung ist grösser als 5.
- Der Erwartungswert ist grösser als der Median.

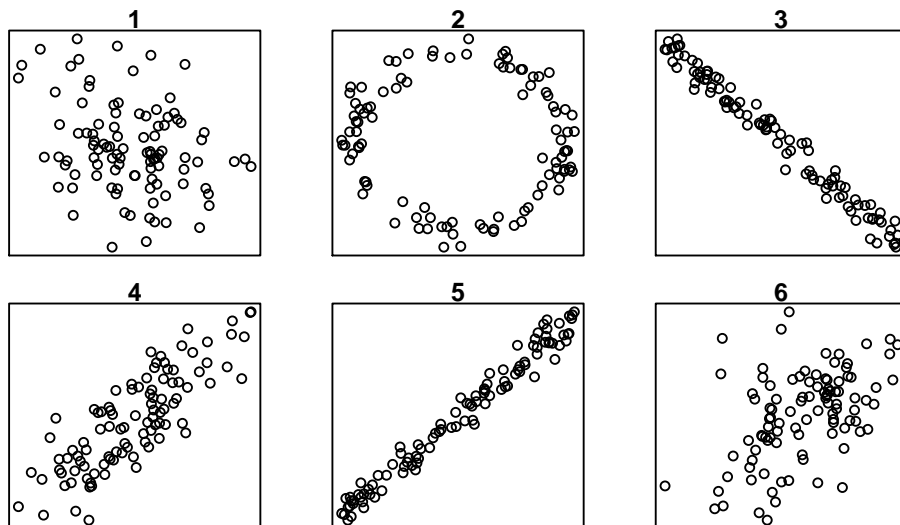
Richtig Falsch

R,R,R,R f) **Siehe nächstes Blatt!**

f) Ordnen Sie die unteren sechs Scatterplots den Korrelationen

$$\begin{array}{lll} a = -0.05 & b = -0.29 & c = 0.83 \\ d = -0.99 & e = 0.99 & f = 0.49 \end{array}$$

zu.



- 1b, 2a
- 2b, 3d
- 4c, 6f
- 3d, 5e

R,F,R,R

Richtig Falsch

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |