Schriftliche Prüfung
(2 Stunden)

Bemerkungen:

- Erlaubte Hilfsmittel: 10 hand- oder maschinengeschriebene A4 Seiten (=5 Blätter). Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet!
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein (Ausnahme: Multiple-Choice Aufgaben). Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.
- Aufgaben 1 bis 4 sind Textaufgaben. Schreiben Sie Ihre Antworten zu diesen Aufgaben auf die dafür vorgesehenen Antwortblätter und nicht auf das Aufgabenblatt.
- Aufgabe 5 ist eine Multiple-Choice Aufgabe. Jede Teilaufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Teilaufgabe können keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein. Die Antworten müssen auf dem separaten Multiple-Choice Antwortblatt (blau) am Ende des Antwortdossiers angekreuzt werden und dürfen *nicht* auf der Prüfung angekreuzt werden. Für jede Aussage gibt es 1/2 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1/2 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen. Keine Teilaufgabe kann mit negativer Punktzahl abgeschlossen werden. Minimal erhält man also für eine ganze Teilaufgabe 0 Punkte.

Viel Erfolg!

1. (9 Punkte)
Emma ist Chefärztin am Universitätsspital Zürich. Im Frühjahr kommen viele Patienten, die über Symptome einer Pollenallergie klagen. Aus vorherigen Studien weiss Emma, dass 70% der Patienten in der Tat eine Pollenallergie haben. Um die Pollenallergie klinisch zu testen, setzt Emma einen neuartigen Bluttest ein. Dieser Bluttest nimmt entweder den Wert "positiv" oder den Wert "negativ" an. Er ist nicht perfekt: Vorherige Studien haben ergeben, dass der Bluttest für Pollenallergiker in 95% der Fälle positiv ausfällt, und für nicht-Pollenallergiker in 90% der Fälle negativ ausfällt. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} P &:= \text{der Patient hat eine Pollenallergie} \\ P^c &:= \text{der Patient hat keine Pollenallergie} \\ B &:= \text{der Bluttest ist positiv} \\ B^c &:= \text{der Bluttest ist negativ} \end{aligned}$$

Wir haben folglich $\mathbb{P}(P) = 0.7$, $\mathbb{P}(B \mid P) = 0.95$ und $\mathbb{P}(B^c \mid P^c) = 0.9$.

a) (1 Punkt) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Bluttest für einen nicht-Pollenallergiker positiv ausfällt?

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathbb{P}[(P \cup B)^c]$. (Hinweis: Verwenden Sie eine der de Morgan'schen Regeln)

c) (2 Punkte) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient einen negativen Bluttest hat? In anderen Worten: Berechnen Sie $\mathbb{P}(B^c)$. (Ersatzresultat: 0.35)

d) (2 Punkte) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient, dessen Bluttest positiv ausfällt, in der Tat eine Pollenallergie hat?

e) (2 Punkte) Um sicher zu gehen, wird der Bluttest an negativ getesteten Patienten einmal wiederholt. Aus Erfahrung weiss Emma, dass pro Tag im Durchschnitt 100 Patienten eintreffen. Emma will abschätzen, wie viele Bluttests sie dafür insgesamt braucht. Wie hoch ist damit der Erwartungswert für die Anzahl an Bluttests, die sie pro Tag durchführen muss? Nehmen Sie an, dass die Anzahl der eintreffenden Patienten unabhängig von den Ereignissen P und B für die einzelnen Patienten ist.

2. (9 Punkte)

Max fährt jeden Tag mit dem Auto zur Arbeit. Sei T die Zufallsvariable, die die Zeit in Minuten angibt, die Max benötigt, um von seinem Wohnort zu seinem Arbeitsplatz zu gelangen. T habe folgende kumulative Verteilungsfunktion:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wobei für den Parameter $\lambda > 0$ gilt. Die Zeiten an verschiedenen Tagen können als unabhängig voneinander angenommen werden.

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(10 < T \leq 15)$ (für allgemeines λ).

b) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max an 5 aufeinander folgenden Tagen jeweils mehr als 8 Minuten für seinen Arbeitsweg benötigt (für allgemeines λ)?

c) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$\frac{\text{median}(T)}{\mathbb{E}[T]} = \log(2),$$

wobei wir mit $\log(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus bezeichnen.

d) (2 Punkte) Der Arbeitsweg von Max dauert im Schnitt (Erwartungswert) 10 Minuten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max für die nächste Fahrt zur Arbeit höchstens fünf Minuten benötigt?

Fritz, der Nachbar von Max, arbeitet am gleichen Ort wie Max, fährt aber mit dem öffentlichen Verkehr zur Arbeit. Sei D die Zeit in Minuten, die Fritz für seinen Arbeitsweg benötigt. Die Verteilung von D sei gegeben als $D = \beta T$, wobei β unabhängig von T verteilt ist mit Verteilung

$$\beta = \begin{cases} 0.5 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.1, \\ 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.2, \\ 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.7. \end{cases}$$

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben $\lambda = 0.1$.

e) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max strikt früher als Fritz ankommt?

f) (3 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max mehr als sieben Minuten vor Fritz ankommt?

3. (**6 Punkte**)
Gian ist Experte für Glühbirnen. Ein Hersteller will ein neues Modell auf den Markt bringen und bittet ihn, die Verteilung der Brenndauer zu schätzen. Gian modelliert die Brenndauer als Zufallsvariable T (Brenndauer in Stunden) mit Dichte

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sqrt{t}\right) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Modellparameter ist. Der Hersteller liefert ihm folgende (i.i.d.) Stichprobe (gerundet):

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
11'300	5'000	4'300	8'500	7'900

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion und die log-Likelihoodfunktion basierend auf n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $t_1, \ldots, t_n$ einer Zufallsvariable mit obiger Dichte. Vereinfachen Sie die Terme jeweils so weit wie möglich.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ für θ. Schreiben Sie die allgemeine Form auf und berechnen Sie den realisierten Wert für die konkret vorliegende Stichprobe.

c) (1 Punkt) Nach Berechnung des Maximum-Likelihood-Schätzers ist Gian zufrieden mit seiner Schätzung, beschliesst aber interessehalber eine zweite Schätzmethode auszuprobieren. Berechnen Sie den Momentenschätzer $\hat{\theta}_{\text{Moment}}$ für θ, basierend auf n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $t_1, \ldots, t_n$ sowie den realisierten Wert für die vorliegende Stichprobe. (Hinweis: $\mathbb{E}(T) = 2\theta^2$).

d) (1 Punkt) Bei einer neuen Stichprobe sieht Gian die Daten nicht mehr, sondern nur noch das berechnete 95%-Vertrauensintervall für θ:

$$[75.2, 85.3].$$

Kann Gian nur mit der Information über dieses Vertrauensintervall die Nullhypothese

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 80$$

auf dem 5%-Signifikanzniveau verwerfen ($H_A : \theta \neq 80$)? Begründen Sie!

4. (7 Punkte)

Die Firma HighPrecMeas ist spezialisiert auf hochpräzise Laservermessung von Linsen. Ziel der aktuellen Messreihe ist es, den durchschnittlichen Durchmesser der Linsen möglichst genau zu schätzen und dem Hersteller zu melden. Dazu werden $n = 115$ Linsen vermessen. Wir nehmen an, dass die Messungen unabhängig voneinander und identisch verteilt sind. Als Verteilung wählen wir eine Normalverteilung, wobei der Erwartungswert dem wahren Wert des Durchmessers entspricht. Mit X_i bezeichnen wir die i-te Messung. Wir haben also $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Folgende Schätzer wurden ermittelt:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 1.396 \text{ cm}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2 = 0.072 \text{ cm}$$

Die Fassungen, in die die Linsen eingesetzt werden, haben einen Durchmesser von 1.36cm.

Wir wollen nun mit einem t-Test untersuchen, ob ein Unterschied zum Sollwert $\mu = \mu_0 = 1.36$ nachgewiesen werden kann. Falls in Wahrheit $\mu = \mu_0$ gilt, möchten wir dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 auch so erkennen.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie die Nullhypothese, die Alternativhypothese und die Teststatistik dazu auf. Um welche Art von Test handelt es sich? (Einstichprobentest, Zweistichprobentest, einseitig, zweiseitig?)

b) (1 Punkt) Führen Sie den entsprechenden t-Test durch: Was ist das Signifikanzniveau α? Was ist das Resultat des Tests?

c) (1 Punkt) Der Chefingenieur will kurioserweise ein 98%-Vertrauensintervall für μ ermitteln! Berechnen Sie dieses. Als Quantil können Sie das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung verwenden.

In einer Sitzung der Firma wird mit Schrecken festgestellt, dass einer der Techniker das Lasermessgerät unsachgemäss verwendet hat. Es wird vermutet, dass die Messungen zu niedrig ausgefallen sind und in Wahrheit die Linsen einen grösseren Durchmesser haben.

Da jede Messung extrem zeitintensiv ist, werden nur 12 Linsen aus den 115 zufällig herausgepickt und mit den neuen Einstellungen erneut gemessen. Beim Mittagessen erwähnt der Techniker, dass in 11 von 12 Fällen mit den neuen Einstellungen tatsächlich ein grösserer Wert gemessen wurde.

d) (1 Punkt) Handelt es sich beim Vergleich der beiden Messmethoden um gepaarte oder ungepaarte Stichproben? Begründen Sie! (1 Punkt für gepaart.)

e) (2 Punkte) Können Sie nur mit obiger Information schon statistisch nachweisen, dass die ursprünglichen Werte zu tief ausgefallen sind? Führen Sie dazu den für die vorliegenden Daten passenden statistischen Test auf dem Signifikanzniveau 0.05 durch. Wie entscheidet dieser? Wählen Sie als Nullhypothese, dass keine systematischen Differenzen zwischen den Messungen bestehen und als Alternativhypothese, dass die zweiten Messungen im Schnitt grösser sind.

5. (**10 Punkte**) Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Markieren Sie Ihre Antwort auf dem separaten Multiple Choice Antwortblatt.

a) (2 Punkte) Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = 0$. Zudem sei Y eine Zufallsvariable mit $Y = X^2$.

1. Es gilt $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X^3]$.
2. Wenn zwei (beliebige) Zufallsvariablen unabhängig sind, dann ist ihre Korrelation exakt gleich 0.
3. Wenn X normalverteilt ist, dann ist Y auch normalverteilt.
4. Die Varianz von X und der Erwartungswert von Y sind gleich gross.

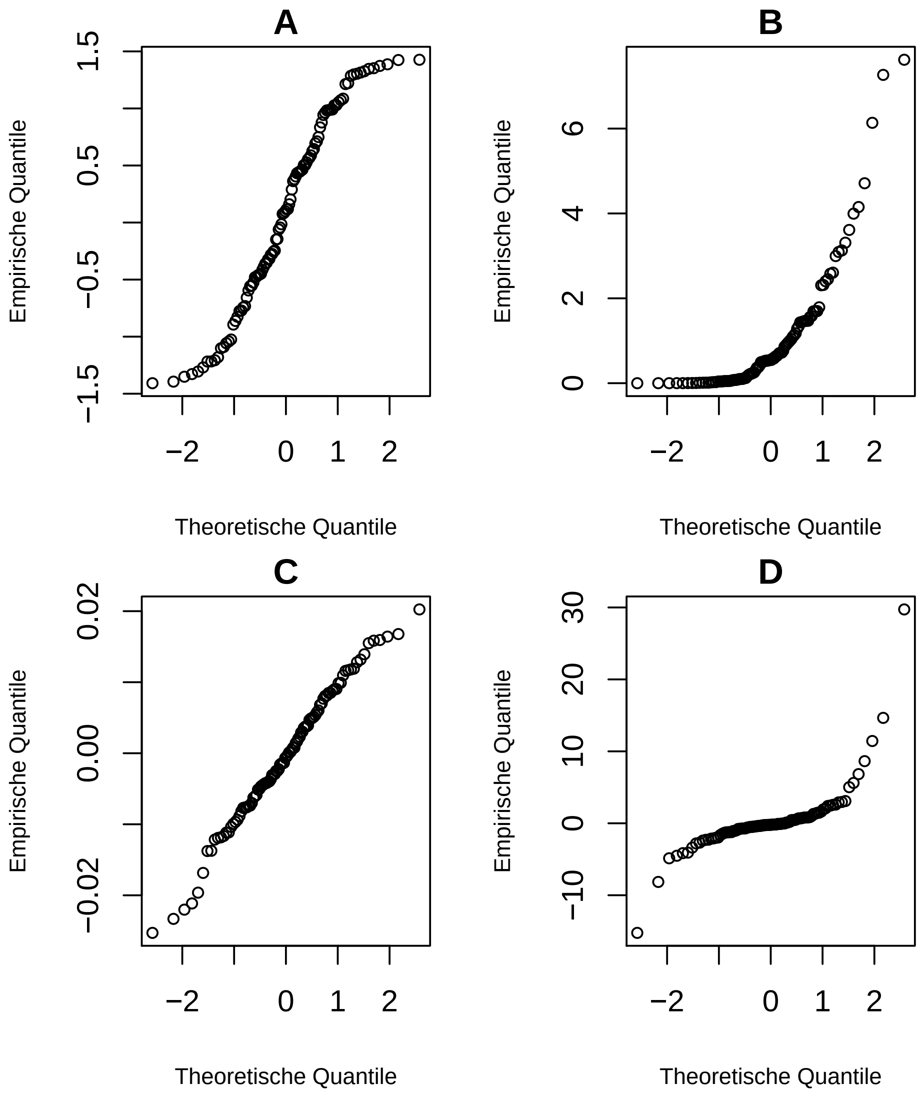
b) (2 Punkte) Beurteilen Sie folgende Aussagen zu der gemeinsamen Verteilung von zwei Zufallsvariablen X und Y mit gemeinsamer Dichte $f(x, y)$ und Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.

1. Wenn $f(x, y)$ die zweidimensionale Normalverteilung ist, dann sind X und Y genau dann unabhängig, wenn X und Y unkorreliert sind.
2. Sei $f(x, y)$ eine beliebige gemeinsame Dichte. Dann gilt
$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$
3. Es gilt immer
$$\mathbb{P}(Y \geq X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{x^2}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
4. Die Randdichte $f_X(x)$ berechnet sich als
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, \mathrm{d}x$$

c) (2 Punkte) Wir betrachten n stetige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und nehmen an, dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. sind mit
$$\mathbb{E}[X_i] = \mu_X, \ \text{Var}(X_i) = \sigma_X^2.$$
Zudem betrachten wir m stetige Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_m$ und nehmen ebenfalls an, dass $Y_1, \ldots, Y_m$ i.i.d. sind mit
$$\mathbb{E}[Y_i] = \mu_Y, \ \text{Var}(Y_i) = \sigma_Y^2.$$
Die Verteilung der Y_i sei verschieden von der Verteilung der X_i. Ferner seien
$$S_n^X = X_1 + \ldots + X_n$$
$$S_m^Y = Y_1 + \ldots + Y_m.$$

1. Wenn $n > m$, dann ist die Approximation der Verteilung von S_n^X durch die Normalverteilung $\mathcal{N}(n\mu_X, n\sigma_X^2)$ immer besser als die Approximation der Verteilung von S_m^Y durch die Normalverteilung $\mathcal{N}(m\mu_Y, m\sigma_Y^2)$.
2. Um die Varianz von $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n^X$ zu halbieren, braucht man doppelt so viele Beobachtungen.
3. Falls $\mu_X = 7$, dann können wir aus dem Zentralen Grenzwertsatz schliessen, dass
$$\mathbb{P}(\overline{X}_n > 7) \approx 0.5 \quad \text{für } n \text{ gross.}$$
4. $\mathbb{E}[S_n^X] = n\mathbb{E}[X_i]$ gilt unabhängig vom Zentralen Grenzwertsatz auch für kleine Stichprobengrössen.

d) (2 Punkte) Betrachten Sie folgende Normalplots von jeweils 100 Beobachtungen.



1. Das empirische 99%-Quantil der Daten in Plot A ist grösser als das 99%-Quantil der Standardnormalverteilung.
2. Bei den Daten in Plot B ist der empirische Median kleiner als das arithmetische Mittel.
3. Die empirische Varianz der Daten in Plot C ist grösser als 1.
4. Bei den Daten in Plot D kommen sehr grosse und sehr kleine Werte häufiger vor als bei einer Standardnormalverteilung.

e) (2 Punkte) Beurteilen Sie folgende Aussagen zu statistischen Tests für einen Modellparameter θ.

1. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = \theta_0$. Der Fehler 2. Art berechnet sich durch
$$1 - \mathbb{P}(\text{Test verwirft richtigerweise } H_0 \text{ für } \theta \in H_A).$$
2. Je kleiner ein Effekt, desto mehr Beobachtungen werden benötigt, um diesen Effekt mittels eines statistischen Tests nachzuweisen.
3. Die Macht eines statistischen Tests hängt allein von dem wahren Wert des Parameters θ ab.
4. Je mehr Beobachtungen vorliegen, desto kleiner wird der Fehler 1. Art.

Tabelle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \leq z\right], \ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \leq 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantile der t-Verteilung

Bsp.: $t_{9,\,0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576