Musterlösung

1. (9 Punkte)
Emma ist Chefärztin am Universitätsspital Zürich. Im Frühjahr kommen viele Patienten, die über Symptome einer Pollenallergie klagen. Aus vorherigen Studien weiss Emma, dass 70% der Patienten in der Tat eine Pollenallergie haben. Um die Pollenallergie klinisch zu testen, setzt Emma einen neuartigen Bluttest ein. Dieser Bluttest nimmt entweder den Wert "positiv" oder den Wert "negativ" an. Er ist nicht perfekt: Vorherige Studien haben ergeben, dass der Bluttest für Pollenallergiker in 95% der Fälle positiv ausfällt, und für nicht-Pollenallergiker in 90% der Fälle negativ ausfällt. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} P &:= \text{der Patient hat eine Pollenallergie} \\ P^c &:= \text{der Patient hat keine Pollenallergie} \\ B &:= \text{der Bluttest ist positiv} \\ B^c &:= \text{der Bluttest ist negativ} \end{aligned}$$

Wir haben folglich $\mathcal{P}(P) = 0.7$, $\mathcal{P}(B \mid P) = 0.95$ und $\mathcal{P}(B^c \mid P^c) = 0.9$.

a) (1 Punkt) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Bluttest für einen nicht-Pollenallergiker positiv ausfällt?
Wir kennen die Wahrscheinlichkeit des Komplements:

$$\mathcal{P}[B \mid P^c] = 1 - \mathcal{P}[B^c \mid P^c] = 1 - 0.9 = 0.1$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathcal{P}[(P \cup B)^c]$. (Hinweis: Verwenden Sie eine der de Morgan'schen Regeln)
Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\mathcal{P}[P^c \cap B^c] = \mathcal{P}[B^c \mid P^c]\mathcal{P}[P^c] = 0.9 * 0.3 = 0.27$$

Nun benutzen wir die de Morgan'sche Regel

$$\mathcal{P}[(P \cup B)^c] = \mathcal{P}[P^c \cap B^c] = 0.27$$

Für jeden dieser zwei Schritte jeweils 1 Punkt.

c) (2 Punkte) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient einen negativen Bluttest hat? In anderen Worten: Berechnen Sie $\mathbb{P}(B^c)$. (Ersatzresultat: 0.35)
Wir zerlegen in disjunkte Ereignisse und benutzen dann die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\mathcal{P}[B^c] = \mathcal{P}[B^c \cap P] + \mathcal{P}[B^c \cap P^c] = \mathcal{P}[B^c \mid P]\mathcal{P}[P] + \mathcal{P}[B^c \mid P^c]\mathcal{P}[P^c] = 0.05*0.7 + 0.9*0.3 = 0.305$$

1 Punkt für $P[B^c] = \mathcal{P}[B^c \mid P]\mathcal{P}[P] + \mathcal{P}[B^c \mid P^c]\mathcal{P}[P^c]$, 1 Punkt für das richtige Ergebnis.

d) (2 Punkte) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient, dessen Bluttest positiv ausfällt, in der Tat eine Pollenallergie hat?
Wir benutzen den Satz von Bayes oder zweimal die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\mathcal{P}[P \mid B] = \frac{\mathcal{P}[P \cap B]}{\mathcal{P}[B]} = \frac{\mathcal{P}[B \mid P]\mathcal{P}[P]}{\mathcal{P}[B]} = \frac{0.95 * 0.7}{0.695} = 0.9568345$$

1 Punkt für $\mathcal{P}[P \mid B] = \frac{\mathcal{P}[B|P]\mathcal{P}[P]}{\mathcal{P}[B]}$, 1 Punkt für das richtige Ergebnis. Mit Ersatzresultat ist das Ergebnis 1.023.

e) (2 Punkte) Um sicher zu gehen, wird der Bluttest an negativ getesteten Patienten einmal wiederholt. Aus Erfahrung weiss Emma, dass pro Tag im Durchschnitt 100 Patienten eintreffen. Emma will abschätzen, wie viele Bluttests sie dafür insgesamt braucht. Wie hoch ist damit der Erwartungswert für die Anzahl an Bluttests, die sie pro Tag durchführen muss? Nehmen Sie an, dass die Anzahl der eintreffenden Patienten unabhängig von den Ereignissen P und B für die einzelnen Patienten ist.
Für n Bluttests an Patienten sind im Erwartungswert $n\mathcal{P}[B^c]$ negativ. Wir wissen aus obiger Aufgabe:

$$100 * \mathcal{P}[B^c] = 100 * 0.305 \approx 31.$$

Damit muss sie im Erwartungswert ungefähr 131 Bluttests durchführen.
1 Punkt für $n\mathcal{P}[B^c]$, 1 Punkt für das richtige Ergebnis. Falls $P[B]$ statt $P[B^c]$ aber sonst alles richtig: 1 Punkt. Falls mit $P[P]$ durchgerechnet: 0 Punkte. Achtung, es gibt eine völlig falsche Rechnung, die zu einem ähnlichen Ergebnis 130 führt, dafür 0 Punkte.

2. (9 Punkte)
Max fährt jeden Tag mit dem Auto zur Arbeit. Sei T die Zufallsvariable, die die Zeit in Minuten angibt, die Max benötigt, um von seinem Wohnort zu seinem Arbeitsplatz zu gelangen. T habe folgende kumulative Verteilungsfunktion:

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

wobei für den Parameter $\lambda > 0$ gilt. Die Zeiten an verschiedenen Tagen können als unabhängig voneinander angenommen werden.

a) (0.5 Punkte) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(10 < T \leq 15)$ (für allgemeines λ). Es ist

$$\mathcal{P}(10 < T \leq 15) = F(15) - F(10) = \exp(-\lambda \cdot 10) - \exp(-\lambda \cdot 15).$$

(0.5 Punkte nur für Resultat)

b) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max an 5 aufeinander folgenden Tagen jeweils mehr als 8 Minuten für seinen Arbeitsweg benötigt (für allgemeines λ)? Es ist

$$\mathcal{P}(T_1 > 8, \ldots, T_5 > 8) = (1 - F(8))^5 = \exp(-\lambda \cdot 8 \cdot 5).$$

(0.5 Punkte für korrekten Startterm+0.5 Punkte für Resultat)

c) (1.5 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt

$$\frac{\operatorname{median}(T)}{\mathbb{E}[T]} = \log(2),$$

wobei wir mit $\log(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus bezeichnen. Es handelt es sich um die Exponentialverteilung. Wir berechnen den Erwartungswert T mithilfe der Dichte aus der vorigen Aufgabe:

$$\mathbb{E}[T] = \int_0^\infty \lambda t \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{1}$$

Der Median berechnet sich als $\operatorname{median}(T) = \frac{\log(2)}{\lambda}$, woraus das Resultat folgt. (0.5 Punkte (mean) + 0.5 Punkte (median) + 0.5 Punkte für Division)

d) (2 Punkte) Der Arbeitsweg von Max dauert im Schnitt (Erwartungswert) 10 Minuten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max für die nächste Fahrt zur Arbeit höchstens fünf Minuten benötigt? Es gilt $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda = 10$, das heisst $\lambda = 1/10$. Nun berechnen wir für dieses λ die Wahrscheinlichkeit, dass T kleiner als 5 ist:

$$\mathbb{P}(T < 5) = 1 - \exp(-5/10) = 1 - \exp(-1/2) = 0.39. \tag{2}$$

1 Punkt (mean) + 1 Punkt Wkeit.

Fritz, der Nachbar von Max, arbeitet am gleichen Ort wie Max, fährt aber mit dem öffentlichen Verkehr zur Arbeit. Sei D die Zeit in Minuten, die Fritz für seinen Arbeitsweg benötigt. Die Verteilung von D sei gegeben als $D = \beta T$, wobei β unabhängig von T verteilt ist mit Verteilung

$$\beta = \begin{cases} 0.5 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.1, \\ 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.2, \\ 2 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0.7. \end{cases}$$

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben $\lambda = 0.1$.

e) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max strikt früher als Fritz ankommt? 0.7 (Es muss davon ausgegangen werden, dass Fritz und Max gleichzeitig losfahren.) (1 Punkt für 0.7 oder 0.5 Punkte für Erwähnen, dass $\beta = 2$ gelten muss.)

f) (3 Punkte) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max mehr als sieben Minuten vor Fritz ankommt? Max kann nur vor Fritz ankommen, wenn $\beta = 2$ (es muss davon ausgegangen werden, dass Fritz und Max gleichzeitig losfahren). Dieses Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0.7 und ist unabhängig von T verteilt. Damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D - T \geq 7) &= \mathbb{P}(\beta T - T \geq 7) \\
&= \mathbb{P}(\beta T - T \geq 7 | \beta > 1)\mathbb{P}(\beta > 1) \\
&= \mathbb{P}(\beta T - T \geq 7)\mathbb{P}(\beta > 1) \\
&= \mathbb{P}(2T - T \geq 7)\mathbb{P}(\beta = 2) \\
&= \mathbb{P}(T \geq 7)\mathbb{P}(\beta = 2) \\
&= \exp(-7/10)0.7 \approx 0.35
\end{aligned}$$

(1 Punkt für korrekten Startterm. 1 Punkt für Erwähnen/Ausnutzen von Unabhängigkeit. 1 Punkt für korrektes Resultat.)

3. (**6 Punkte**)
Gian ist Experte für Glühbirnen. Ein Hersteller will ein neues Modell auf den Markt bringen und bittet ihn, die Verteilung der Brenndauer zu schätzen. Gian modelliert die Brenndauer als Zufallsvariable T (Brenndauer in Stunden) mit Dichte

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sqrt{t}\right) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Modellparameter ist. Der Hersteller liefert ihm folgende (i.i.d.) Stichprobe (gerundet):

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
11'300	5'000	4'300	8'500	7'900

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion und die log-Likelihoodfunktion basierend auf n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $t_1, \ldots, t_n$ einer Zufallsvariable mit obiger Dichte. Vereinfachen Sie die Terme jeweils so weit wie möglich. Die Likelihoodfunktion hat folgende Form:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta\sqrt{t_i}} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sqrt{t_i}\right).$$

Die Log-Likelihoodfunktion hat folgende Form:

$$l(\theta) = \log L(\theta) = -n \log(2\theta) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \log(t_i) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{t_i}.$$

Jeweils 1 Punkt für die Likelihoodfunktion und die Log-Likelihoodfunktion. Bei kleinen Fehlern 1/2 Punkt Abzug. Keine Folgefehler innerhalb der Aufgabe.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$ für θ. Schreiben Sie die allgemeine Form auf und berechnen Sie den realisierten Wert für die konkret vorliegende Stichprobe.
Durch Ableiten und Nullsetzen der Log-Likelihoodfunktion erhalten wir folgenden Schätzer:

$$\hat{\theta}_{\mathsf{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{t_i}.\ \text{(0.5 Punkte)}$$

Das Berechnen des theoretischen Schätzers gibt 1.5 Punkte, für kleine Fehler jeweils 1/2 Punkt Abzug. Falls falsche Loglikelihoodfunktion aus a) verwendet wurde, zählt dies als Folgefehler. Für die vorliegende Stichprobe erhalten wir

$$\hat{\theta}_{\mathsf{MLE}} = 84.73278.$$

(0.5 Punkte)

c) (1 Punkt) Nach Berechnung des Maximum-Likelihood-Schätzers ist Gian zufrieden mit seiner Schätzung, beschliesst aber interessehalber eine zweite Schätzmethode auszuprobieren. Berechnen Sie den Momentenschätzer $\hat{\theta}_{\text{Moment}}$ für θ, basierend auf n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $t_1, \ldots, t_n$ sowie den realisierten Wert für die vorliegende Stichprobe. (Hinweis: $\mathcal{E}(T) = 2\theta^2$).
Es gilt $\theta = \sqrt{\frac{1}{2}\,\mathcal{E}(T)}$. Folglich ist der Momentenschätzer:

$$\hat{\theta}_{\mathsf{Moment}} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} t_i}.$$

(0.5 Punkte) Eingesetzt erhalten wir $\hat{\theta}_{\mathsf{Moment}} = 60.82763$ (0.5 Punkte). Keine Folgefehler innerhalb dieser Aufgabe.

d) (1 Punkt) Bei einer neuen Stichprobe sieht Gian die Daten nicht mehr, sondern nur noch das berechnete 95%-Vertrauensintervall für θ:

$$[75.2, 85.3].$$

Kann Gian nur mit der Information über dieses Vertrauensintervall die Nullhypothese

$$H_0 : \theta = \theta_0 = 80$$

auf dem 5%-Signifikanzniveau verwerfen ($H_A : \theta \neq 80$)? Begründen Sie! Nein, weil der Wert 80 im Vertrauensintervall enthalten ist. 0 Punkte, wenn Antwort ohne Begründung.

4. (7 Punkte)
Die Firma HighPrecMeas ist spezialisiert auf hochpräzise Laservermessung von Linsen. Ziel der aktuellen Messreihe ist es, den durchschnittlichen Durchmesser der Linsen möglichst genau zu schätzen und dem Hersteller zu melden. Dazu werden $n = 115$ Linsen vermessen. Wir nehmen an, dass die Messungen unabhängig voneinander und identisch verteilt sind. Als Verteilung wählen wir eine Normalverteilung, wobei der Erwartungswert dem wahren Wert des Durchmessers entspricht. Mit X_i bezeichnen wir die i-te Messung. Wir haben also $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Folgende Schätzer wurden ermittelt:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.396 \text{ cm}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2 = 0.072 \text{ cm}$$

Die Fassungen, in die die Linsen eingesetzt werden, haben einen Durchmesser von 1.36cm.

Wir wollen nun mit einem t-Test untersuchen, ob ein Unterschied zum Sollwert $\mu = \mu_0 = 1.36$ nachgewiesen werden kann. Falls in Wahrheit $\mu = \mu_0$ gilt, möchten wir dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 auch so erkennen.

a) (2 Punkte) Schreiben Sie die Nullhypothese, die Alternativhypothese und die Teststatistik dazu auf. Um welche Art von Test handelt es sich? (Einstichprobentest, Zweistichprobentest, einseitig, zweiseitig?)

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu \neq \mu_0.$$

Es handelt sich um einen zweiseitigen Einstichprobentest. Die Teststatistik ist gegeben als

$$T = \sqrt{n}\frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S}, \tag{3}$$

mit $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2}$. (1 Punkt für zweistg. Einstichprobentest. 1 Punkt für richtige Teststatistik.)

b) (1 Punkt) Führen Sie den entsprechenden t-Test durch: Was ist das Signifikanzniveau α? Was ist das Resultat des Tests? Da wir den Fehler erster Art mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 kontrollieren wollen, ist das Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$. Man berechnet $S = \sqrt{0.07234506} = 0.2689704$. Dann berechnen wir die Teststatistik als

$$T = \sqrt{115}\frac{1.363611 - 1.36}{0.026897} = 10.7238 * \frac{0.003611}{0.026897} = 1.439 \tag{4}$$

Nun werden die Quantile in der Tabelle nachgeschaut ($n-1 = 114$ Freiheitsgrade), da die Tabelle den exakten Wert nicht beinhaltet können auch $n = 90, 120$ verwendet werden, $t_{\alpha/2,n} = 1.98$. H_0 wird also nicht verworfen. (0.5 Punkte für Signifikanzlevel und 0.5 Punkte für richtigen Testentscheid)

c) (1 Punkt) Der Chefingenieur will kurioserweise ein 98%-Vertrauensintervall für μ ermitteln! Berechnen Sie dieses. Als Quantil können Sie das entsprechende Quantil der Standardnormalverteilung verwenden. Wir haben

$$VI = \hat{\mu} \pm z_{0.99}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{115}} = 1.396 \pm 2.326 \cdot \sqrt{0.072}/\sqrt{115} = [1.34, 1.45]$$

(0.5 Punkte für richtige Formel+ 0.5 Punkte für korrektes Resultat)

In einer Sitzung der Firma wird mit Schrecken festgestellt, dass einer der Techniker das Lasermessgerät unsachgemäss verwendet hat. Es wird vermutet, dass die Messungen zu niedrig ausgefallen sind und in Wahrheit die Linsen einen grösseren Durchmesser haben.

Da jede Messung extrem zeitintensiv ist, werden nur 12 Linsen aus den 115 zufällig herausgepickt und mit den neuen Einstellungen erneut gemessen. Beim Mittagessen erwähnt der Techniker, dass in 11 von 12 Fällen mit den neuen Einstellungen tatsächlich ein grösserer Wert gemessen wurde.

d) (1 Punkt) Handelt es sich beim Vergleich der beiden Messmethoden um gepaarte oder ungepaarte Stichproben? Begründen Sie! (1 Punkt für gepaart.) Es handelt sich um gepaarte Stichproben, da an der gleichen Linse zwei Messungen durchgeführt werden.

e) (2 Punkte) Können Sie nur mit obiger Information schon statistisch nachweisen, dass die ursprünglichen Werte zu tief ausgefallen sind? Führen Sie dazu den für die vorliegenden Daten passenden statistischen Test auf dem Signifikanzniveau 0.05 durch. Wie entscheidet dieser? Wählen Sie als Nullhypothese, dass keine systematischen Differenzen zwischen den Messungen bestehen und als Alternativhypothese, dass die zweiten Messungen im Schnitt grösser sind. Wir verwenden einen Vorzeichentest. Der p-Wert berechnet sich als $0.5^{12} + 12 \cdot 0.5^{12} = 0.00317$. Das heisst H_0 wird verworfen. (0.5 Punkte für korrekten Test + 0.5 Punkte für korrekte Hypothese + 0.5 Punkte für korrekten Verwerfungsbereich oder p-Wert + 0.5 Punkte für korrekten Testentscheid)

5. (**10 Punkte**) Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Markieren Sie Ihre Antwort auf dem separaten Multiple Choice Antwortblatt.

a) (2 Punkte) R, R, F, R
b) (2 Punkte) R, F, R, F
c) (2 Punkte) F, R, R, R
d) (2 Punkte) F, R, F, R
e) (2 Punkte) R, R, F, F