Schriftliche Prüfung (2 Stunden)

Bemerkungen:

- Erlaubte Hilfsmittel: 10 hand- oder maschinengeschriebene A4 Seiten (=5 Blätter). Taschenrechner ohne Kommunikationsmöglichkeit.
- Mobiltelefone sind auszuschalten!
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch! Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen grosse Schwierigkeiten bereitet! Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben vollständig lösen.
- Die nötigen Tabellen befinden sich auf den hintersten Seiten dieser Prüfung.
- Der Lösungsweg muss klar ersichtlich sein (Ausnahme: Multiple-Choice Aufgaben). Wenn Ihnen für einen Aufgabenteil ein Zwischenresultat fehlt, treffen Sie eine sinnvolle Annahme und markieren Sie diese deutlich.
- Aufgaben 1 bis 4 sind Textaufgaben. Schreiben Sie Ihre Antworten zu diesen Aufgaben auf die dafür vorgesehenen Antwortblätter und nicht auf das Aufgabenblatt.
- Aufgabe 5 ist eine Multiple-Choice Aufgabe. Jede Teilaufgabe besteht aus mehreren Aussagen. Pro Teilaufgabe können keine, eine oder mehrere Aussagen richtig sein. Die Antworten müssen auf dem separaten Multiple Choice Antwortblatt (blau) am Ende des Antwortdossiers angekreuzt werden und dürfen *nicht* auf der Prüfung angekreuzt werden. Für jede Aussage gibt es 1/2 Punkt, wenn sie korrekt markiert wird. 1/2 Punkt wird abgezogen, wenn eine Aussage falsch markiert wird. Wenn eine Aussage nicht markiert wird, gibt es keinen Punkt, es wird aber auch kein Punkt abgezogen. Keine Teilaufgabe kann mit negativer Punktzahl abgeschlossen werden. Minimal erhält man also für eine ganze Teilaufgabe 0 Punkte.

Viel Erfolg!

1. (8 Punkte)
Bei der Post werden 70% der Briefe mit A-Post und 30% der Briefe mit B-Post verschickt. Aus Erfahrung weiss die Post, dass ein A-Post Brief mit einer Wahrscheinlichkeit von 3.2% **nicht** rechtzeitig beim Empfänger ankommt. Wir definieren folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &:= \text{der Brief wird mit A-Post versandt} \\ B &:= \text{der Brief wird mit B-Post versandt} \\ R &:= \text{der Brief trifft rechtzeitig beim Empfänger ein} \\ R^c &:= \text{der Brief trifft nicht rechtzeitig beim Empfänger ein.} \end{aligned}$$

Also haben wir $\mathbb{P}(A) = 0.7$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ und $\mathbb{P}(R^c \mid A) = 0.032$.

a) (1 Punkt) Sie senden einen wichtigen Brief per A-Post. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Brief rechtzeitig ankommt? (Ersatzresultat: 0.95)

b) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Kunde am Postschalter, der einen Brief versenden will, einen A-Post Brief versendet und dieser dann auch rechtzeitig ankommt?

c) (1 Punkt) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A \mid B)$.

d) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Brief nicht rechtzeitig ankommt, falls $\mathbb{P}(R^c \mid B) = 0.015$? (Ersatzresultat: 0.04)

e) (2 Punkte) Sie haben einen Brief verspätet erhalten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Brief mit B-Post versandt wurde, falls $\mathbb{P}(R^c \mid B) = 0.015$? Sind die Ereignisse B und R^c unabhängig?

f) (2 Punkte) Die Post hat ein neues Money-Back Angebot für A-Post Briefe. Falls ein A-Post Brief zu spät eintrifft, zahlt die Post dem Kunden 1 Franken zurück. Pro A-Post Brief verdient die Post 0.75 Franken. Wie hoch ist der erwartete Gewinn pro A-Post Brief für die Post mit diesem Angebot?

2. (9 Punkte)

Benjamin hat sich ein neues Velo gekauft und fährt damit nun täglich. Da er häufig auf Kieswegen fährt, hat er oft einen platten Reifen. Wir bezeichnen dies als "Reifenpanne". Die Zufallsvariable L_1 mit Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{500} \exp\left(-\frac{t}{500}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

beschreibt die Lebensdauer (in Tagen) des vorderen Reifens (d.h. die Zeit bis zur Reifenpanne).

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F(t)$.

b) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der vordere Reifen länger als 500 Tage keine Reifenpanne aufweist?

c) (2 Punkte) Welche Lebensdauer wird von dem vorderen Reifen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2 überschritten?

Wir betrachten nun zusätzlich die Zufallsvariable L_2, welche die Lebensdauer (in Tagen) des hinteren Reifens beschreibt. Wir nehmen an, dass L_1 und L_2 unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Zufallsvariablen sind.
Sobald eine Reifenpanne auftritt, ersetzt Benjamin **beide** Reifen durch neue. Die Zufallsvariable T bezeichne die Anzahl Tage ab dem Ersetzen der beiden Reifen bis zur nächsten Reifenpanne. (*Hinweis*: Es gilt $T = \min(T_1, T_2)$).

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion von T. (Ersatzresultat: $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{250}$)

Insgesamt besitzt Benjamin 8 Velos. Da es ihm zu mühsam ist, bei jeder Reifenpanne beide Reifen zu ersetzen, benutzt er stattdessen einfach eines der anderen Velos. Erst wenn alle 8 Velos Reifenpannen aufweisen, ersetzt er die Reifen. Nehmen Sie an, dass die Wartezeiten bis zur ersten Reifenpanne bei allen Velos identisch und unabhängig gemäss der Zufallsvariablen T in Teilaufgabe d) verteilt sind.

e) (3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass Benjamin mit dieser Vorgehensweise länger als 6 Jahre (1 Jahr = 365 Tage) keine Reifen wechseln muss.

3. (**8 Punkte**)
Um genauere Prognosen bezüglich der Flugzeiten ihrer Flugzeuge machen zu können, möchte die Fluggesellschaft SwitzAir zur Modellierung der absoluten Windgeschwindigkeiten neuerdings eine Rayleigh-Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

und kumulativer Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

benutzen, wobei $\sigma > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Sie wurden von der Forschungsabteilung beauftragt, den unbekannten Parameter σ der Verteilung anhand von n beobachteten Datenpunkten zu schätzen.

Hinweis: Für eine Rayleigh(σ)-verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ und $\mathrm{Var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Likelihood- und die log-Likelihoodfunktion basierend auf den n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ einer Zufallsvariable mit obiger Dichte. Berechnen Sie daraus den Maximum-Likelihood Schätzer für den unbekannten Parameter σ.

Da die SwitzAir selbst über keine Messinstrumente zur Messung der absoluten Windgeschwindigkeiten verfügt, beauftragt sie ein meteorologisches Institut, 100 Windgeschwindigkeitsmessungen durchzuführen. Das meteorologische Institut liefert folgende Kennzahlen: Mittelwert $\bar{x} = 2.01$, Standardabweichung $s_x = 0.51$, Median $m = 3.12$ und Quartilsdifferenz $q_{0.75} - q_{0.25} = 0.89$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Momentenschätzer basierend auf dem ersten Moment. Welchen Wert nimmt der Schätzer für die gesammelten Daten des meteorologischen Instituts an?

SwitzAir ist zufrieden mit der Schätzung des Parameters σ. Sie möchte nun die theoretischen Eigenschaften der Rayleigh-Verteilung genauer untersuchen.

c) (1 Punkt) Berechnen Sie das theoretische zweite Moment der Rayleigh-Verteilung.

d) (2 Punkte) Die Zufallsvariable X sei Rayleigh-verteilt mit obiger Dichte und kumulativer Verteilungsfunktion. Wir betrachten nun die transformierte Zufallsvariable $Y = \frac{X^2}{2\sigma^2\lambda}$ mit $\lambda > 0$. Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F(y) = P[Y \leq y]$ von Y für $y > 0$.

4. (8 Punkte)
Anna fährt jeden Morgen mit dem Velo zur Arbeit und notiert die dafür benötigte Zeit. Zu ihrem Geburtstag hat sie ein neues Velo bekommen und hat nun das Gefühl, dass sie damit schneller unterwegs ist. Aus ihren Aufzeichnungen geht hervor, dass sie bisher im langjährigen Mittel 1153 Sekunden für ihren Arbeitsweg benötigt hat. An den 41 Arbeitstagen seit ihrem Geburtstag hat sie für den Weg zur Arbeit durchschnittlich 1092 Sekunden gebraucht, mit einer Standardabweichung von 184 Sekunden, wobei sie bei 25 der 41 Fahrten schneller unterwegs war als im langjährigen Mittel.

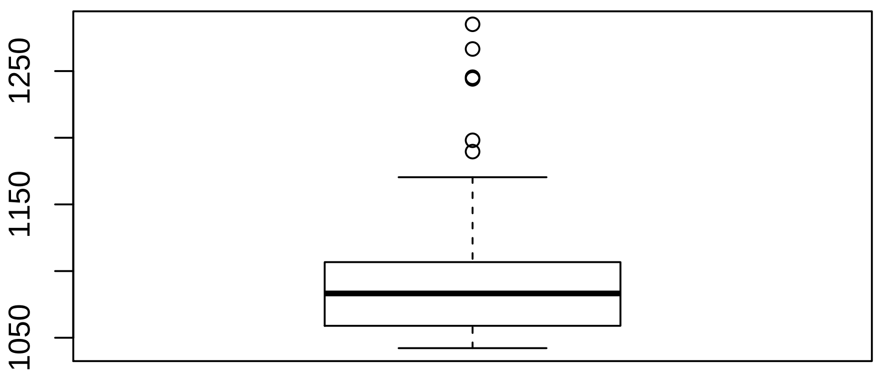
a) (1 Punkt) Welche Annahmen müssen erfüllt sein, damit Sie hier einen t-Test durchführen können? Nennen Sie nur notwendige Annahmen.

b) (2 Punkte) Führen Sie einen einseitigen t-Test auf dem 5%-Niveau durch um zu prüfen, ob Anna mit dem neuen Velo signifikant schneller unterwegs ist als im langjährigen Mittel. Nennen Sie explizit Null- und Alternativhypothese, Teststatistik, Verteilung unter H_0, Verwerfungsbereich, sowie den Testentscheid.

c) (1 Punkt) Berechnen Sie ein zweiseitiges 99%-Vertrauensintervall für die durchschnittliche Fahrzeit seit Annas Geburtstag.

d) (3 Punkte) Führen Sie nun noch einen einseitigen Vorzeichentest auf dem 5%-Niveau durch: Nennen Sie explizit Null- und Alternativhypothese, Teststatistik und die (exakte) Verteilung der Teststatistik unter H_0. Berechnen Sie den p-Wert des Tests mittels Verwendung einer Normalapproximation. Wie lautet der Testentscheid diesmal?

e) (1 Punkt) Nehmen Sie nun an, der Boxplot der Fahrzeiten sieht wie folgt aus:



Warum sollte man den Vorzeichentest in diesem Fall *nicht* anwenden, um unsere Hypothese zu testen?

5. (**12 Punkte**) Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Markieren Sie Ihre Antwort auf dem separaten Multiple Choice Antwortblatt.

a) Für zwei standardisierte Zufallsvariablen X, Y gilt immer:

1. $\mathbb{E}[X] = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 0$
2. $\mathrm{Corr}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$
3. X und Y haben die gleiche Verteilung.
4. X und Y haben den gleichen Erwartungswert.

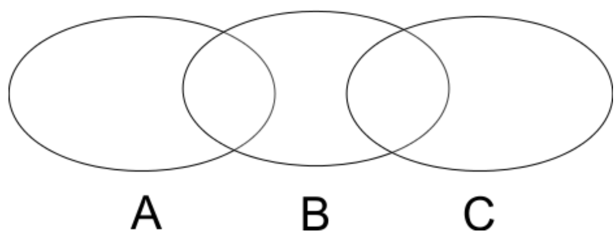
b) Beurteilen Sie folgende Aussagen zu stetigen Verteilungen.

1. Die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{falls } x \in [-1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
ist eine Dichte.
2. Für die uniforme Verteilung ist der Erwartungswert gleich dem Median.
3. Bei stetigen Verteilungen mit Verteilungsfunktion $F(\cdot)$ ist das $\alpha-$Quantil immer gegeben durch $F^{-1}(\alpha)$.
4. Für stetige Zufallsvariabeln X gilt immer
$$\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2 .$$

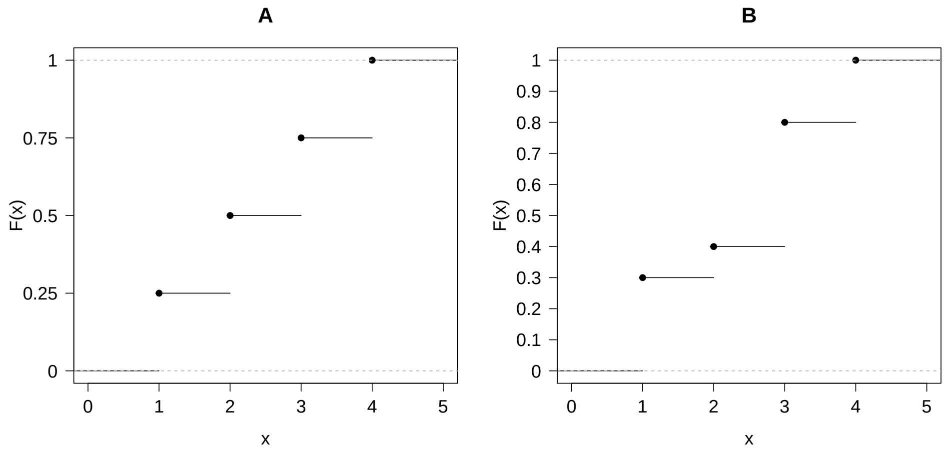
c) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 1$ und $\sigma^2 = 4$ und $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Mit $\Phi(\cdot)$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dann gilt:

1. $\mathbb{P}\left(\frac{X-1}{2} \leq y\right) = \Phi(y)$
2. $\Phi^{-1}(0.91) = 0.8186$
3. $\mathbb{E}[2X - 3Y] = -1$
4. $\Phi(-1) = \mathbb{P}(Y \geq 1)$

d) Betrachten Sie die Mengen A, B und C in folgender Abbildung. Wir wissen zudem: A und B sind unabhängig, B und C sind unabhängig sowie $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C) > 0$. Welche Aussagen treffen dann zu?



1. $\mathbb{P}(A \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$
2. A und C sind unabhängig
3. $\mathbb{P}(A \cup C^c) = 1 - \mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$



e) Betrachten Sie folgende Plots. Stimmen die Aussagen?

1. Für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion wie in Plot A gilt:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4)$$

2. Falls eine Zufallsvariable X die Verteilungsfunktion von Plot B hat, dann gilt:

$$\mathbb{P}(2.5 \leq X \leq 5) = 0.7$$

3. Für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion wie in Plot B gilt:

$$\mathbb{E}(X) = 2.5$$

4. Der Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen kann nur Werte aus dem Wertebereich der Zufallsvariablen annehmen.

f) Betrachten Sie den einseitigen t-Test für die Situation

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_A : \mu > \mu_0$$

Mit T bezeichnen wir die Teststatistik des t-Tests und mit t die entsprechende Realisierung davon.

1. Der p-Wert zur beobachteten Teststatistik t wird grösser, falls das Signifikanzniveau kleiner wird.
2. Zur Berechnung der Teststatistik des t-Tests müssen wir die Standardabweichung σ schätzen.
3. Zur Berechnung der Macht des t-Tests müssen wir den realisierten Wert kennen.
4. Falls der realisierte Wert im Verwerfungsbereich liegt, kann kein Fehler 2. Art vorliegen.

Tabelle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \mathrm{P}\,[Z \leq z]\,,\;\; Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{Bsp.: } \mathrm{P}\,[Z \leq 1.96] = 0.975$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Quantile der t-Verteilung

Bsp.: $t_{9,\,0.975} = 2.262$

df	$t_{0.60}$	$t_{0.70}$	$t_{0.80}$	$t_{0.90}$	$t_{0.95}$	$t_{0.975}$	$t_{0.99}$	$t_{0.995}$
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
31	0.255	0.530	0.853	1.309	1.696	2.040	2.452	2.744
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.693	2.035	2.445	2.733
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576