Musterlösung

1. (8 Punkte)

a) (1 Pt) Für das Komplement gilt

$$\mathcal{P}(R \mid A) = 1 - \mathcal{P}(R^c \mid A) = 0.968.$$

b) (1 Pt) Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt folgendes:

$$\mathcal{P}(R \cap A) = \mathcal{P}(R \mid A) \cdot \mathcal{P}(A) = 0.968 \cdot 0.7 = 0.6776.$$

c) (1 Pt) Da A und B disjunkt sind gilt,

$$\mathcal{P}(A \mid B) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = 0.$$

d) (1 Pt) Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brief (A-Post oder B-Post) nicht rechtzeitig ankommt.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(R^c) &= \mathcal{P}(R^c \cap A) + \mathcal{P}(R^c \cap B) \\ &= \mathcal{P}(R^c \mid A) \cdot \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(R^c \mid B) \cdot \mathcal{P}(B) \\ &= 0.0269.\end{aligned}$$

Hier haben wir den Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit verwendet.

e) (2 Pt) Nun können wir den Satz von Bayes anwenden um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass der verspätete Brief mit B-Post versandt wurde.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(B \mid R^c) &= \frac{\mathcal{P}(R^c \mid B) \cdot \mathcal{P}(B)}{\mathcal{P}(R^c)} \\ &= 0.167.\end{aligned}$$

(Mit dem Ersatzresultat ist $\mathcal{P}(B \mid R^c) = 0.1125$.)
Zudem sehen wir hier auch schnell, dass B und R^c nicht unabhängig sind, da $\mathcal{P}(B \mid R^c) \neq \mathcal{P}(B)$.

f) (2 Pt)
Wir definieren eine neue Zufallsvariable X als den Gewinn pro versendetem Brief.

$$X = \begin{cases} 0.75, & \text{falls Brief nicht verspätet} \\ -0.25, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erwartungswert berechnet sich wiefolgt:

$$\mathcal{E}(X) = 0.75 \cdot \mathcal{P}(R \mid A) - 0.25 \cdot \mathcal{P}(R^c \mid A) = 0.718.$$

2. (9 Punkte)
Benjamin hat sich ein neues Velo gekauft und fährt damit nun täglich. Da er häufig auf Kieswegen fährt, hat er oft einen platten Reifen. Wir bezeichnen dies als "Reifenpanne". Die Zufallsvariable L_1 mit Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{500} \exp\left(-\frac{t}{500}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

beschreibt die Lebensdauer (in Tagen) des vorderen Reifens (d.h. die Zeit bis zur Reifenpanne).

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F(t)$.
Die kumulative Verteilungsfunktion erhält man durch Integration der Dichte. Für $t \leq 0$ gilt $F(t) = 0$. Für $t > 0$ erhält man

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = \int_{0}^{t} \frac{1}{500} \exp\left(-\frac{x}{500}\right) dx = 1 - \exp\left(-\frac{t}{500}\right).$$

Die kumulative Verteilungsfunktion ist also

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t}{500}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Alternativ kann man argumentieren, dass es sich bei der obigen Dichte um diejenige einer Exponentialverteilung handelt und so auf die kumulative Verteilungsfunktion schliessen.
(1 Punkt für richtige Antwort)

b) (1 Punkt) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der vordere Reifen länger als 500 Tage keine Reifenpanne aufweist?

$$P[L_1 > 500] = 1 - P[L_1 \leq 500] = 1 - F(500) = \exp\left(-\frac{500}{500}\right) = \frac{1}{e} = 0.3679. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

c) (2 Punkte) Welche Lebensdauer wird von dem vorderen Reifen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.2 überschritten?
Gesucht ist das 80%-Quantil $q := q_{0.8}$ oder analog: dasjenige q, sodass $P[L_1 \leq q] = 0.8$.

$$\begin{aligned} F(q) &= P[L_1 \leq q] = 0.8 \\ &\Rightarrow 1 - \exp\left(-\frac{q}{500}\right) = 0.8 \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &\Rightarrow \exp\left(-\frac{q}{500}\right) = 0.2 \\ &\Rightarrow q = -500 \cdot \log(0.2) = 500 \cdot \log(5) = 804.72 \text{ Tage.} \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun zusätzlich die Zufallsvariable L_2, welche die Lebensdauer (in Tagen) des hinteren Reifens beschreibt. Wir nehmen an, dass L_1 und L_2 unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Zufallsvariablen sind.
Sobald eine Reifenpanne auftritt, ersetzt Benjamin **beide** Reifen durch neue. Die Zufallsvariable T bezeichne die Anzahl Tage ab dem Ersetzen der beiden Reifen bis zur nächsten Reifenpanne. (*Hinweis*: Es gilt $T = \min(T_1, T_2)$).

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion von T. (Ersatzresultat: $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{250}$)
Die nächste Reifenpanne tritt auf, sobald einer der beiden Reifen platt ist, das heisst $T = \min(L_1, L_2)$. Die kumulative Verteilungsfunktion von T berechnet sich daher als

$$\begin{aligned} P[T \leq t] &= P[\min(L_1, L_2) \leq t] = 1 - P[\min(L_1, L_2) > t] = 1 - P[L_1 > t, L_2 > t] \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &= 1 - P[L_1 > t] \cdot P[L_2 > t] = 1 - \exp\left(-\frac{t}{500}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{500}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{250}\right). \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

T ist also wiederum exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{250}$.

Insgesamt besitzt Benjamin 8 Velos. Da es ihm zu mühsam ist, bei jeder Reifenpanne beide Reifen zu ersetzen, benutzt er stattdessen einfach eines der anderen Velos. Erst wenn alle 8 Velos Reifenpannen aufweisen, ersetzt er die Reifen. Nehmen Sie an, dass die Wartezeiten bis zur ersten Reifenpanne bei allen Velos identisch und unabhängig gemäss der Zufallsvariablen T in Teilaufgabe d) verteilt sind.

e) (3 Punkte) Berechnen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass Benjamin mit dieser Vorgehensweise länger als 6 Jahre (1 Jahr = 365 Tage) keine Reifen wechseln muss.

Wenn Benjamin länger als 6 Jahre keine Reifen wechseln muss, bedeutet dies, dass die Summe der Wartezeiten bis zur ersten Reifenpanne bei den 8 Velos mehr als 6 Jahre beträgt. Sei T_1 die Wartezeit bis zur Reifenpanne beim ersten Velo, T_2 die Wartezeit bis zur Reifenpanne beim zweiten Velo. Analog seien $T_i, i = 3, ..., 8$ die Wartezeiten bis zur Reifenpanne beim i-ten Velo. Dann ist die totale Wartezeit bis alle 8 Velos eine Reifenpanne aufweisen

$$S_8 = T_1 + T_2 + ... + T_8 = \sum_{i=1}^{8} T_i. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Gemäss dem zentralen Grenzwertsatz ist diese Summe approximativ normalverteilt, i.e. $S_8 \approx \mathcal{N}(8 \cdot \mu, 8 \cdot \sigma^2)$ mit $\mu = E[T_1] = \frac{1}{\lambda} = 250$ und $\sigma^2 = \text{Var}(T_1) = \frac{1}{\lambda^2} = 250^2 = 62500$.
Also folgt:

$$S_8 \approx \mathcal{N}(2000, 500000). \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gegeben als

$$\begin{aligned} P[S_8 > 6 \cdot 365] &= P[S_8 > 2190] = 1 - P[S_8 \leq 2190] = 1 - \Phi\left(\frac{2190 - 2000}{\sqrt{500000}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.2687) = 1 - 0.6064 = 0.3936. \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

3. (**8 Punkte**)
Um genauere Prognosen bezüglich der Flugzeiten ihrer Flugzeuge machen zu können, möchte die Fluggesellschaft SwitzAir zur Modellierung der absoluten Windgeschwindigkeiten neuerdings eine Rayleigh-Verteilung mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

und kumulativer Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

benutzen, wobei $\sigma > 0$ ein unbekannter Parameter ist. Sie wurden von der Forschungsabteilung beauftragt, den unbekannten Parameter σ der Verteilung anhand von n beobachteten Datenpunkten zu schätzen.

Hinweis: Für eine Rayleigh(σ)-verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathcal{E}[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ und $\text{Var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Likelihood- und die log-Likelihoodfunktion basierend auf den n unabhängigen, identisch verteilten Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ einer Zufallsvariable mit obiger Dichte. Berechnen Sie daraus den Maximum-Likelihood Schätzer für den unbekannten Parameter σ.

Die Likelihoodfunktion ist gegeben durch

$$\ell(\sigma; x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{x_i}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \right\} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{(\sigma^2)^n} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma^2}\right). \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Die log-Likelihoodfunkition ist dann

$$\log \ell(\sigma; x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - 2n \log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\sigma^2}. \quad \textbf{(1/2 Punkt)}$$

Um nun den Maximum Likelihood Schätzer für σ zu erhalten leiten wir die log-Likelihoodfunktion nach σ ab und setzen das Resultat gleich null.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \log \ell(\sigma; x_1, \ldots x_n)\bigg|_{\sigma=\hat{\sigma}} = 0 - \frac{2n}{\hat{\sigma}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\hat{\sigma}^3} \stackrel{!}{=} 0. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Wenn wir das auflösen nach $\hat{\sigma}$ erhalten wir den Schätzer

$$\hat{\sigma}_{MLE} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \quad \textbf{(1/2 Punkt)}$$

Da die SwitzAir selbst über keine Messinstrumente zur Messung der absoluten Windgeschwindigkeiten verfügt, beauftragt sie ein meteorologisches Institut, 100 Windgeschwindigkeitsmessungen durchzuführen. Das meteorologische Institut liefert folgende Kennzahlen: Mittelwert $\bar{x} = 2.01$, Standardabweichung $s_x = 0.51$, Median $m = 3.12$ und Quartilsdifferenz $q_{0.75} - q_{0.25} = 0.89$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Momentenschätzer basierend auf dem ersten Moment. Welchen Wert nimmt der Schätzer für die gesammelten Daten des meteorologischen Instituts an?
Durch Gleichsetzen der ersten Momente $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ und Auflösen nach σ erhält man den Momentenschätzer

$$\hat{\sigma}_{MoM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Um den konkreten Wert des Schätzers anzugeben, benötigt man nur den Mittelwert der Daten. Für die gegebenen 100 Datenpunkte ist der Schätzer gegeben durch:

$$\hat{\sigma}_{MoM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\bar{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2.01 = 1.60 \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

SwitzAir ist zufrieden mit der Schätzung des Parameters σ. Sie möchte nun die theoretischen Eigenschaften der Rayleigh-Verteilung genauer untersuchen.

c) (1 Punkt) Berechnen Sie das theoretische zweite Moment der Rayleigh-Verteilung.
Mit den Hinweisen $\mathcal{E}[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ und $\mathsf{Var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$ folgt direkt:

$$\mathcal{E}[X^2] = \mathsf{Var}(X) + \mathcal{E}[X]^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 + \frac{\pi}{2}\sigma^2 = 2\sigma^2.$$

d) (2 Punkte) Die Zufallsvariable X sei Rayleigh-verteilt mit obiger Dichte und kumulativer Verteilungsfunktion. Wir betrachten nun die transformierte Zufallsvariable $Y = \frac{X^2}{2\sigma^2\lambda}$ mit $\lambda > 0$. Berechnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F(y) = P[Y \leq y]$ von Y für $y > 0$.

$$\begin{aligned} P[Y \leq y] &= P[\frac{X^2}{2\sigma^2\lambda} \leq y] = P[X^2 \leq 2\sigma^2\lambda y] \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ &= P[X \leq \sqrt{2\sigma^2\lambda y}] = 1 - \exp\left(-\frac{2\sigma^2\lambda y}{2\sigma^2}\right) = 1 - \exp\left(-\lambda y\right). \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

$Y = \frac{X^2}{2\sigma^2\lambda}$ ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

4. **a)** $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)\ \forall i$ (0.5 Pt) und X_i sind unabhängig (0.5 Pt).

b) Sei X_i die Fahrzeit am Tag i, $1 \leq i \leq 41$, mit $E[X_i] = \mu\ \forall i$

- $H_0 : \mu = 1153, \quad H_A : \mu < 1153$ (0.5 Pt)
- Teststatistik $T = \frac{\bar{X}_n - 1153}{S_n/\sqrt{n}} \sim t_{40}$ unter H_0; wir haben $\bar{x}_n = 1092$ und $s_n = 184$, somit $t = -2.12$ (0.5 Pt)
- Verwerfungsbereich $K = (-\infty, -t_{40,0.95}] = (-\infty, -1.684]$ (0.5 Pt)
- Testentscheid: $t \in K$, also wird H_0 verworfen. (0.5 Pt)

c) Das zweiseitige 99%-Vertrauensintervall für den t-Test ist gegeben durch

$$I = \bar{x}_n \pm \frac{s_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,0.995} \quad (0.5 Pt)$$

Also

$$I = 1092 \pm \frac{184}{\sqrt{41}} 2.704 = [1014.3, 1169.7] \quad (0.5 Pt)$$

d) Vorzeichentest (wir nehmen an, dass die Verteilung der X_i symmetrisch ist):

- $H_0 : \mu = 1153, \quad H_A : \mu < 1153$
- Teststatistik $T = \#\{X_i < 1153\} \sim Bin(41, 0.5)$ unter H_0 (1 Pt)
- Normalapproximation: $T \overset{approx}{\sim} \mathcal{N}(np, np(1-p)) = \mathcal{N}(n/2, n/4) = \mathcal{N}(20.5, 10.25)$ (0.5 Pt)
- p-Wert: Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit (unter H_0) den beobachteten Wert der Teststatistik, oder einen noch extremeren (im Sinne der Alternative), zu beobachten. $t = 25$, also ist

$$p = P_{H_0}(T \geq 25) = P\left(\frac{T - 20.5}{3.2} \geq 1.41\right) = 1 - \Phi(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793 \quad (1 Pt)$$

- Testentscheid: $p > 0.05$, also wird H_0 *nicht* verworfen (0.5 Pt).

e) Die Verteilung ist eindeutig *nicht* symmetrisch, d.h. dass Median und Erwartungswert nicht übereinstimmen. Der Vorzeichentest bezieht sich auf den Median, während wir am Erwartungswert interessiert sind. (1 Pt)

5. (**12 Punkte**) Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Markieren Sie Ihre Antwort auf dem separaten Multiple Choice Antwortblatt.

a) F,R,F,R

b) F,R,R,R

c) R,F,F,R

d) R,F,R,R

e) R,F,R,F

f) F,R,F,R