Musterlösung

1. (**10 Punkte**) Ein Zulieferer von Metallplatten liefert 1% fehlerhafte Produkte. Das Ereignis einer intakten Platte nennen wir A, das Ereignis einer fehlerhaften Platte demnach A^c. Die verarbeitende Firma benutzt einen visuellen Test, um herauszufinden, ob eine gelieferte Platte einwandfrei ist. Der Test erfüllt laut Hersteller folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} P(T_+ \mid A) &= 0.993 \\ P(T_- \mid A^c) &= 0.998 \end{aligned}$$

Hier bedeutet das Ereignis T_+, dass der Test keinen Fehler feststellt ("Alles in Ordnung!") und T_-, dass der Test einen Fehler findet ("Warnung!").

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(T_+)$ und $P(T_-)$.

$$\begin{aligned} P(T_+) &= P(T_+ \mid A) \cdot P(A) + \big(1 - P(T_- \mid A^c)\big) \cdot P(A^c) \\ &= 0.993 \cdot 0.99 + 0.002 \cdot 0.01 \approx 0.98309 \quad \text{(1 Punkt)} \\ P(T_-) &= P(T_- \mid A^c) \cdot P(A^c) + \big(1 - P(T_+ \mid A)\big) \cdot P(A) \\ &= 0.998 \cdot 0.01 + 0.007 \cdot 0.99 \approx 0.01691 \quad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte in Ordnung ist, falls der Test nichts zu beanstanden hat.

$$P(A \mid T_+) = \frac{P(T_+ \mid A) \cdot P(A)}{P(T_+)} \approx 0.9999797 \quad \text{(1 Punkt)}$$

c) Berechnen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte fehlerhaft ist, falls das Testergebnis eine Warnung ausgibt.

$$P(A^c \mid T_-) = \frac{P(T_- \mid A^c) \cdot P(A^c)}{P(T_-)} \approx 0.5901833 \quad \text{(1 Punkt)}$$

d) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Platte defekt ist und der Test eine entsprechende Warnung ausgibt?

$$P(A^c \cap T_-) = P(T_- \mid A^c) \cdot P(A^c) \approx 0.00998 \quad \text{(1 Punkt)}$$

e) Die Kosten (alle in CHF) für einen Test betragen 10. Hat der Test etwas zu beanstanden (T_-), kommen weitere 100 Ersatzkosten hinzu. Wird aber eine defekte Platte vom Test übersehen ($A^c \cap T_+$), kommen stattdessen 300 Ersatzkosten hinzu, da der Fehler erst später in der Produktionskette entdeckt wird. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Kosten K für eine Metallplatte.

$$\begin{aligned} E(K) &= 110 \cdot P(T_-) + 310 \cdot P(A^c \cap T_+) + 10 \cdot (1 - P(T_-) - P(A^c \cap T_+)) \approx 11.70 \quad \text{(1 Punkt)} \\ E(K^2) &= 110^2 \cdot P(T_-) + 310^2 \cdot P(A^c \cap T_+) + 100 \cdot (1 - P(T_-) - P(A^c \cap T_+)) \approx 304.84 \\ Var(K) &= E(K^2) - E(K)^2 \approx 168.02 \quad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

f) Wir führen nun einen zweiten Test U ein. Wieder bedeutet das Ereignis U_+ “Alles in Ordnung!” und U_- “Warnung!”. Wir nehmen an, dass

$$P(U_+ \,|\, A) = P(T_+ \,|\, A) = 0.993$$
$$P(U_- \,|\, A^c) = P(T_- \,|\, A^c) = 0.998$$

und dass T_- und U_- unabhängig gegeben A (und A^c) sind. Letzteres bedeutet:

$$P(T_- \cap U_- \,|\, A) = P(T_- \,|\, A) \cdot P(U_- \,|\, A) \quad \text{und}$$
$$P(T_- \cap U_- \,|\, A^c) = P(T_- \,|\, A^c) \cdot P(U_- \,|\, A^c).$$

Wie hoch ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit jetzt, dass eine Platte fehlerhaft ist, falls *beide Testergebnisse* eine Warnung ausgeben?

$$\begin{aligned}
P(A^c \,|\, T_- \cap U_-) &= \frac{P(T_- \cap U_- \,|\, A^c) \cdot P(A^c)}{P(T_- \cap U_-)} \quad \text{(1 Punkt)} \\
&= \frac{P(T_- \,|\, A^c) \cdot P(U_- \,|\, A^c) \cdot P(A^c)}{P(T_- \cap U_- \,|\, A) \cdot P(A) + P(T_- \cap U_- \,|\, A^c) \cdot P(A^c)} \\
&= \frac{P(T_- \,|\, A^c) \cdot P(U_- \,|\, A^c) \cdot P(A^c)}{P(T_- \,|\, A) \cdot P(U_- \,|\, A) \cdot P(A) + P(T_- \,|\, A^c) \cdot P(U_- \,|\, A^c) \cdot P(A^c)} \quad \text{(1 Punkt)} \\
&= \frac{0.998 \cdot 0.998 \cdot 0.01}{0.007 \cdot 0.007 \cdot 0.99 + 0.998 \cdot 0.998 \cdot 0.01} \approx 0.9951531 \quad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

2. (**10 Punkte**) In dieser Aufgabe geht es um das Rechnen mit stetigen Verteilungen. Wir modellieren die Lebensdauer eines Bauteils (in Wochen) mit einer Verteilung mit folgender kumulativer Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \exp(-(\beta x)^\alpha), & x > 0 \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ Parameter sind.

a) Bestimmen Sie die Dichte der Verteilung.

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} \exp(-(\beta x)^\alpha), & x > 0 \end{cases}$$

(2 Punkte)

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil länger als 4 Wochen funktioniert, wenn $\alpha = 2$ und $\beta = \frac{1}{4}$?
$1 - F(4) \approx 37\%$ (1 Punkt)

c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil innerhalb des Intervalls $[5, 10]$ Wochen ausfällt, wenn $\alpha = 2$ und $\beta = \frac{1}{4}$?
$F(10) - F(5) \approx 21\%$ (1 Punkt)

d) Wie gross ist der Median der Lebensdauer (für allgemeines α, β)?
Wir lösen $F(m) = 1/2$, d.h. $\exp(-(\beta x)^\alpha) = \frac{1}{2}$. Dies liefert

$$m = \frac{(\log 2)^{1/\alpha}}{\beta}.$$

(2 Punkte)

e) Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion von $Y = (\beta X)^\alpha$, wobei X eine Zufallsvariable ist, die die kum. Verteilungsfunktion F hat (mit allgemeinem α und β). Wie heisst diese Verteilung?
Die CDF ist

$$P(Y \le y) = P\left(X \le \frac{y^{1/\alpha}}{\beta}\right) = F\left(\frac{y^{1/\alpha}}{\beta}\right) = \begin{cases} 1 - \exp(-y), & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

d.h., Y ist exponentialverteilt mit Ratenparameter 1.
(2 Punkte)

f) Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, wobei X kum. Verteilungsfunktion F mit $\alpha = 2$ und $\beta = \frac{1}{4}$ hat, und Y kum. Verteilungsfunktion F mit $\alpha = 3$ und $\beta = \frac{1}{6}$ hat. Berechnen Sie $P(\min\{X, Y\} \leq 4)$.

$P(\min\{X,Y\} \leq 4) = 1 - P(X > 4, Y > 4) = 1 - P(X > 4)P(Y > 4) \approx 1 - 0.3679 * 0.7436 \approx 73\%$

(2 Punkte)

3. (**8 Punkte**) In dieser Aufgabe geht es um Parameterschätzung. Wir betrachten die geometrische Verteilung. Dies ist eine diskrete Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

wobei $0 < p < 1$ die Erfolgswahrscheinlichkeit ist. Eine geometrisch verteilte Zufallsvariable beschreibt die Anzahl der Versuche bis sich der erste Erfolg einstellt bei unabhängigen Bernoulliversuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir wollen den Parameter p aus einer Stichprobe schätzen.

a) Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion basierend auf n unabhängigen identisch verteilten Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen.
Die Likelihood ist

$$\ell(p; x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p)^{x_i - 1}p = (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}p^n.$$

(1 Punkt)

b) Bestimmen Sie den zugehörigen Maximum Likelihood Schätzer für p.
Die Log-Likelihood ist

$$\log \ell(p; x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum x_i - n\right)\log(1-p) + n\log(p).$$

(1 Punkt)
Ableiten und nullsetzen gibt

$$-\frac{\sum x_i - n}{1-p} + \frac{n}{p} = 0,$$

d.h. $\widehat{p}_{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.
(2 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für p (wieder basierend auf n unabhängigen Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$). Vergleichen Sie mit dem Maximum Likelihood Schätzer.
Hinweis: $E(X) = \frac{1}{p}$.
Gleichsetzen der Momente, $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, ergibt $\widehat{p}_{MoM} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, also $\widehat{p}_{MLE} = \widehat{p}_{MoM}$.
(1 Punkt)

d) Angenommen Sie haben nur eine einzige Beobachtung x einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen. Wir können das Experiment dann auch folgendermassen interpretieren: Es wurden x unabhängige Bernoulliversuche durchgeführt und dabei wurde genau ein Erfolg beobachtet. Schreiben Sie die Likelihoodfunktion für dieses Experiment auf: Was ist der Unterschied zu der in **a)** gefundenen Likelihoodfunktion (für $n = 1$)? Warum erhalten Sie den gleichen Maximum Likelihood Schätzer?
Die Likelihood ist

$$\ell(p; x) = \binom{x}{1}(1-p)^{x-1}p = x(1-p)^{x-1}p.$$

(1 Punkt)
Die Likelihoods unterscheiden sich nur durch eine Proportionalitätskonstante, die nicht von p abhängt, und daher werden die Likelihoods als Funktionen in p für das gleiche Argument maximiert.
(2 Punkte)

4. (**10 Punkte**) Die Firma SteelWire hat ein neues Werk in China eröffnet. Sie stellt dort Stahldrähte her. Die Zugfestigkeit der Stahldrähte sollte möglichst gleich sein wie bei den Drähten, die im Heimwerk hergestellt werden. Der Chef-Ingenieur vermutet jedoch, dass sich die Zugfestigkeiten der beiden Werke unterscheiden. Er hat deshalb je 8 Drähte ausgemessen. Die Daten (in N/mm^2) sind in folgender Tabelle ersichtlich.

	1	2	3	4	5	6	7	8
Heimwerk (x_i)	1418.4	1478.7	1528.3	1401.3	1522.6	1507.7	1512.7	1605.5
Werk China (y_j)	1380.3	1604.1	1423.0	1388.2	1425.5	1512.7	1503.7	1462.3

Kennzahlen: $\overline{x} = 1496.9$, $\overline{y} = 1462.5$, $s_x = 64.9$, $s_y = 75.1$.

Wir modellieren die jeweiligen Daten mit einer Normalverteilung, d.h. X_i iid. $\sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$, Y_j iid. $\sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.

a) Betrachten Sie folgende Aussagen.

Richtig Falsch

- Es handelt sich hier um gepaarte Stichproben. Eine Versuchseinheit ist ein Stahldraht. ○ ○
- Es handelt sich hier um ungepaarte Stichproben. Die Stahldrähte aus den beiden Werken haben nichts miteinander zu tun. ○ ○
- Bei gepaarten Stichproben sind die beiden Stichproben immer gleich gross. ○ ○
- Bevor wir entscheiden können, ob die Stichproben gepaart sind, müssen wir das Signifikanzniveau festlegen. ○ ○

F, R, R, F

b) Betrachten Sie folgende Aussagen zur Nullhypothese H_0.

Richtig Falsch

- $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ ○ ○
- H_0 : Die erwartete Zugfestigkeit ist in beiden Werken gleich gross. ○ ○
- H_0 : Es gibt keinen Unterschied zwischen den Zugfestigkeiten der Drähte innerhalb eines Werkes. ○ ○
- $H_0 : \mu_X \neq \mu_Y$ ○ ○

R, R, F, F

c) Betrachten Sie folgende Aussagen zur Alternative H_A.

Richtig Falsch

- H_A : Es existiert ein Unterschied zwischen den erwarteten Zugfestigkeiten der beiden Werke. ○ ○
- $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$. ○ ○
- $H_A : \mu_X > \mu_Y$. ○ ○
- H_A : Das Werk in China liefert schlechtere Qualität (im Sinne von tieferen Zugfestigkeiten). ○ ○

R, R, F, F

d) Sie führen nun einen zweiseitigen Zwei-Stichproben t-Test für unabhängige Stichproben durch (unabhängig davon, was Sie oben geantwortet haben). Betrachten Sie folgende Aussagen.

Richtig Falsch

- Die Teststatistik berechnet sich als ○ ○

$$T = \frac{34.4}{S_{pool}\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}}.$$

- Es ist $S^2_{pool} = \frac{1}{16}\left(64.9^2 + 75.1^2\right)$. ○ ○
- Der Verwerfungsbereich auf dem 5% Niveau ist gegeben durch ○ ○

$$K = (-\infty, -2.12] \cup [2.12, \infty).$$

- Falls der realisierte Wert der Teststatistik nicht im Verwerfungsbereich liegt, dann haben wir damit die Nullhypothese statistisch nachgewiesen. ○ ○

R, F, F, F

e) Wir nehmen an, dass das 95%-Vertrauensintervall für die Differenz $\mu_X - \mu_Y$ gegeben sei durch $[-41, 110]\, N/mm^2$. Betrachten Sie folgende Aussagen.

Richtig Falsch

- Der entsprechende Test verwirft die Nullhypothese $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ auf dem 5% Niveau. ○ ○
- Der entsprechende Test verwirft die Nullhypothese $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ auf dem 1% Niveau. ○ ○
- Wenn Abweichungen ab 150 N/mm^2 als relevant gelten, dann kann hier von einem irrelevanten Unterschied ausgegangen werden. ○ ○
- Wenn wir den gleichen Versuch nochmals durchführen würden, dann würden wir ein Vertrauensintervall mit einer sowohl anderen Breite wie auch mit einer anderen Lage erhalten. ○ ○

F, F, R, R

5. (**17 Punkte**)

a) Die Ereignisse A und B seien disjunkt und $P(B) > 0$ sowie $P(A) > 0$. Dann gilt in diesem Fall

Richtig Falsch

- $P(A^c \cap B^c) + P(B) = 1 - P(A)$ ○ ○
- $P(A \cap B) < P(A)$ ○ ○
- $P(A \mid B) = P(B \mid A)$ ○ ○
- $P(A \cup B) > P(A)$ ○ ○

R, R, R, R

b) Betrachten Sie folgende Aussagen zu stetigen Zufallsvariablen.

Richtig Falsch

- Wenn X exponential-verteilt ist, so gilt ○ ○

$$P\left(X \in [0, 1]\right) > P(X \in [a, a + 1])$$

für alle $a > 0$.

- Wenn wir die gemeinsame Dichte von zwei Zufallsvariablen (X, Y) kennen, so können wir damit immer die Kovarianz $\mathrm{Cov}(X, Y)$ berechnen. ○ ○
- Aus der gemeinsamen Dichte der Zufallsvariablen (X, Y) können wir nur im Falle von Unabhängigkeit die Randdichten bestimmen. ○ ○

- Der Erwartungswert der Zufallsvariable X mit kumulativer Verteilungsfunktion ○ ○

$$F(x) = \begin{cases} x^5 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

ist $\frac{5}{6}$.

R, R, F, R

c) Es sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ und $Y = -X$. Dann gilt

	Richtig	Falsch
• $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.	○	○
• $\mathrm{Var}(X + Y) = 0$.	○	○
• Die Korrelation zwischen X und Y ist -1.	○	○
• $\mathrm{Var}(E[X]) = \sigma^2$.	○	○

R, R, R, F

d) Sei X eine Zufallsvariable, die die Werte $1, 2, 3$ oder 4 annimmt. Die Entropie von X ist definiert als

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{4} P(X = i) \cdot \log_2(P(X = i))$$

wobei $0 \cdot \log_2(0) = 0$. $H(X)$ ist ein Mass dafür, wie "unsicher" wir über das Ergebnis von X sind.

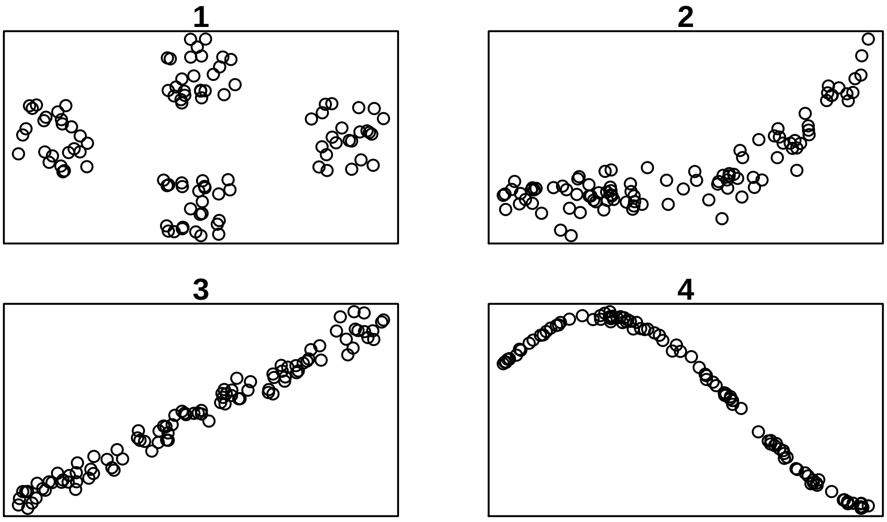
	Richtig	Falsch
• Es gilt immer $H(X) \geq 0$.	◯	◯
• Wenn X deterministisch ist (d.h. $P(X = i) = 1$ für ein i), so gilt $H(X) = 0$.	◯	◯
• Wenn $H(X) = 0$, so ist X deterministisch.	◯	◯
• Die Zufallsvariable $Y = 5 - X$ nimmt ebenfalls die Werte $1, 2, 3$ und 4 an. Es gilt dann $H(Y) = H(X)$.	◯	◯

R, R, R, R

e) Ordnen Sie die unteren vier Scatterplots den Korrelationen

$$a = 0.01 \qquad b = 0.99 \qquad c = 0.81 \qquad d = -0.89$$

zu.



	Richtig	Falsch
• 1a, 4d	◯	◯
• 2b, 3c	◯	◯
• 1c, 2d	◯	◯
• Bei keinem der Plots sind die beiden Variablen unabhängig.	◯	◯

R, F, F, R

f) Wir modellieren die Anzahl Unfälle an einer Strassenkreuzung pro Jahr (365 Tage) mit einem homogenen Poisson-Prozess. Im Schnitt gibt es an der Kreuzung 5 Unfälle pro Jahr.

	Richtig	Falsch
• Falls wir heute einen Unfall beobachtet haben, so müssen wir im Schnitt 1/5 Jahr warten, bis der nächste Unfall geschieht.	◯	◯
• Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag kein Unfall passiert, ist gegeben durch $$e^{-5}/365.$$	◯	◯
• Wenn ein Unfall Kosten in der Höhe von 5000 CHF verursacht, dann ist die Standardabweichung der jährlichen Kosten $5000 \cdot 5$ CHF.	◯	◯

R, F, F

g) Betrachten Sie folgende Aussagen zu statistischen Tests (denken Sie z.B. an einen Z-Test).

	Richtig	Falsch
• Mit dem Signifikanzniveau wird der Fehler 1. Art kontrolliert.	◯	◯
• Je mehr Beobachtungen wir haben, desto kleiner wird der Fehler 1. Art, wenn wir einen Test auf dem 5%-Niveau durchführen.	◯	◯
• Je mehr Beobachtungen wir haben, desto wahrscheinlicher ist es, dass wir die Nullhypothese auf dem 5%-Niveau verwerfen, wenn sie in Tat und Wahrheit nicht stimmt.	◯	◯

R, F, R

h) Wir wollen mit einem χ^2-Test die Nullhypothese testen, ob Daten von einer Normalverteilung stammen. Dabei schätzen wir die Parameter aus der Stichprobe.

	Richtig	Falsch
• Wenn wir 10 Klassen verwenden, dann müssen wir eine χ^2-Verteilung mit 7 Freiheitsgraden verwenden zur Ermittlung des Verwerfungsbereichs.	◯	◯
• Die Wahl der Klassen hat keinen Einfluss auf das Ergebnis des Tests.	◯	◯
• Wenn die Daten in Tat und Wahrheit von einer t-Verteilung stammen, so machen wir einen Fehler 2. Art, wenn wir die Nullhypothese nicht verwerfen.	◯	◯
• Wenn wir die Parameter nicht aus der Stichprobe schätzen, so können wir die erwarteten Häufigkeiten auch schon vor Erhalt der Stichprobe berechnen, so lange wir wissen, wie gross die Stichprobe ist.	◯	◯

R, F, R, R

i) Lisa hat eine Maschine gekauft, die das Abwerfen einer Münze filmt und anhand einer komplizierten Videoanalyse das Ergebnis ("Kopf" oder "Zahl") vorhersagt. Der Verkäufer hat behauptet, dass man mit dieser Maschine Vorhersagen machen kann, die in mehr als der Hälfte der Fälle zutreffen.
Zu Hause möchte Lisa schauen, ob man mit Hilfe eines statistischen Tests die Behauptung des Verkäufers nachweisen kann. Sei X die Anzahl der von der Maschine korrekt geratenen Ergebnisse (aus $n = 20$ Versuchen). Zur Modellierung von X verwenden wir also eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 20$ und Erfolgswahrscheinlichkeit p, d.h. $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n = 20$. Als Null- und Alternativhypothesen verwenden wir

$$H_0 : p = 0.5 \text{ und } H_A : p > 0.5\,.$$

Richtig Falsch

- Falls wir 15 korrekt vorhergesagte Würfe beobachten, so berechnet sich der p-Wert hier als
$$\sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} 0.5^k (1-0.5)^{20-k}.$$
○ ○

- Um die Macht zu berechnen, müssen wir nicht wissen, wie viele korrekt vorhergesagte Würfe beim Versuch eingetreten sind. ○ ○

- Lisa berechnet die Macht des Tests für $p = 0.55$, der Hersteller für $p = 0.75$ (beide für $n = 20$ und für das gleiche Signifikanzniveau). Die berechnete Macht des Herstellers wird kleiner sein als die berechnete Macht von Lisa. ○ ○

- Wenn wir das Signifikanzniveau verkleinern, dann wird die Macht generell auch kleiner. ○ ○

R, R, F, R