Elementare Wahrscheinlichkeit: Prüfung vom 18. 12. 2013

Name, Vorname	
Legi-Nr.	

Wichtige Hinweise:

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Bitte legen Sie Ihre Legi offen auf das Pult.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bitte versorgen Sie alles ausser Papier und Schreibzeug in Ihrer Mappe/Tasche, auch das ausgeschaltete Handy.
- Die maximale Punktezahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Teilaufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer auf diesem Deckblatt ein und geben Sie es am Schluss mit Ihren Lösungen ab.

****

(Bitte leer lassen)

Nr.	Korrektur	Nachkorrektur
1.1		
1.2		
1.3		
2.1		
2.2		
2.3		
3.1		
3.2		
Total		

1. Entropie und Kodierung

1.1 (3 Punkte) Wir betrachten drei Abbildungen

$$\varphi_i : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \cup_{\ell=1}^{5} \{0, 1\}^{\ell} \quad (i = 1, 2, 3),$$

welche in folgender Tabelle definiert sind:

	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_1	101	11	0001	1100	1101	0010	01	0011
φ_2	0	100	101	110	11100	11101	11110	11111
φ_3	10	01	000	001	110	1110	1101	1111

a) Welche dieser Abbildungen sind Präfix-Kodes ?

b) Wenn φ_i kein Präfix-Kode ist, gibt es einen Präfix-Kode φ' der die gleichen Kodelängen hat wie φ_i ? Geben Sie einen solchen Präfix-Kode φ' an, oder begründen Sie, weshalb er nicht existieren kann.

1.2 (2 Punkte) Wie ist die Entropie einer Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}$ auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ definiert ? Beschreiben Sie in zwei bis drei Sätzen den Zusammenhang zwischen Entropie und der erwarteten Kodelänge von Präfix-Kodes.

1.3 (4 Punkte) Sei $\mathbb{P}$ eine Wahrscheinlichkeit auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $p(1) > p(2) > ... > p(n) > 0$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}'$ auf $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ ist dann definiert als

$$p'(i) = p(i) \ (i < n-1), \quad p'(n-1) = p(n-1) + p(n).$$

Ferner seien ℓ und ℓ' die Längen der beiden Präfix-Kodes, welche unter $\mathbb{P}$, bzw. $\mathbb{P}'$ optimal sind. Berechnen Sie $\mathbb{E}(\ell) - \mathbb{E}'(\ell')$ und $H(\mathbb{P}) - H(\mathbb{P}')$ und zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(\ell) - \mathbb{E}'(\ell') \geq H(\mathbb{P}) - H(\mathbb{P}').$$

Wann gilt Gleichheit ?

2. Mischen von Karten

2.1 (2 Punkte) Berechnen Sie den totalen Variationsabstand zwischen der uniformen Verteilung auf der Menge aller Permutationen ω von n Elementen und der uniformen Verteilung auf der Untermenge aller Permutationen, bei denen $\omega(1) = 1$ ist.

2.2 (3 Punkte) Wir betrachten die folgenden Permutationen von 8 Elementen:

$$\omega_1 = (35278614), \quad \omega_2 = (34712568), \quad \omega_3 = (41328765).$$

a) Wie viele Runs haben ω_1, ω_2 und ω_3 ?

b) Wie wahrscheinlich sind ω_1, ω_2 und ω_3 unter einem, bzw. zwei unabhängigen riffle shuffles ? (Wie im Skript gibt $\omega(i)$ den Platz der Karte nach dem Mischen an, die vor dem Mischen an Stelle i war).

2.3 (2 Punkte) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei einem riffle shuffle von n Karten die oberste Karte unverändert bleibt ?

3. Markovketten

3.1 (4 Punkte) Λ sei eine stochastische $n \times n$ Matrix, deren Elemente alle grösser Null sind, und γ sei eine Wahrscheinlichkeit auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\gamma(i) > 0$ für alle i. Wir bilden damit die folgende $n \times n$ Matrix

$$\begin{aligned} \Pi(i,j) &= \Lambda(i,j) \min\left(1, \frac{\gamma(j)\Lambda(j,i)}{\gamma(i)\Lambda(i,j)}\right) \quad (i \neq j) \\ \Pi(i,i) &= 1 - \sum_{j; j \neq i} \Pi(i,j). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Π eine stochastische Matrix ist, und dass γ reversibel ist für Π.

3.2 (5 Punkte) Wir betrachten die Markovkette mit 11 Zuständen und Übergängen gemäss Abb. 1.

a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

b) Welche Paare von Zuständen sind verbunden und welche Zustände sind transient, bzw. rekurrent ? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie das Gleichungssystem an, mit dem man die Wahrscheinlichkeiten berechnen kann, dass ausgehend von einem transienten Zustand i der erste besuchte rekurrente Zustand $= j$ ist. (Die Lösung des Gleichungssystems ist nicht verlangt).

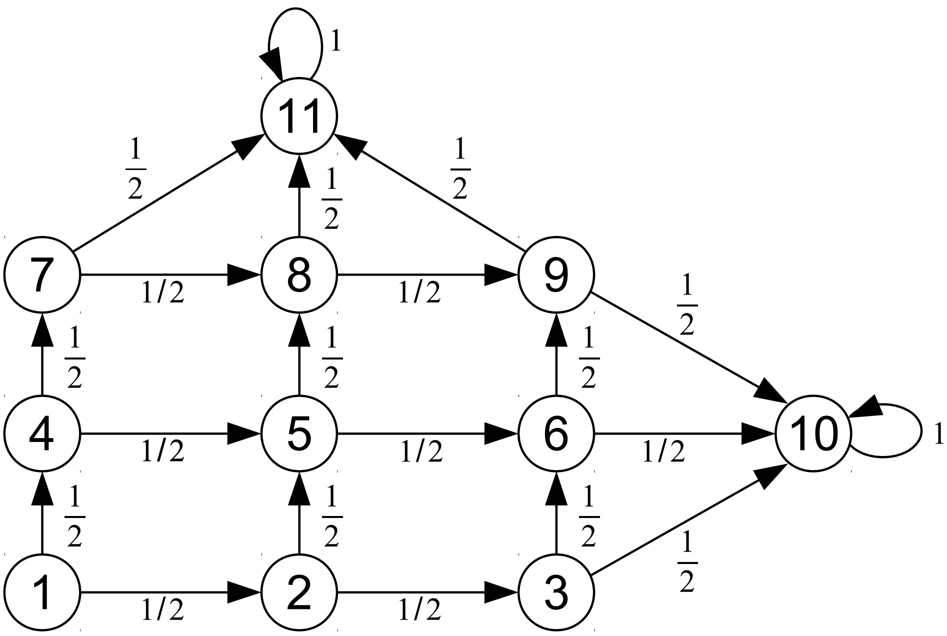

Abbildung 1: Gewichteter, gerichteter Graph, der die Markovkette für Aufgabe 3.2 beschreibt.