Übung 11

1. Die Lebenszeit T eines Cäsium-137-Nuklids ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.023/\text{Jahr}$.

a) Gib Erwartungswert, Median, Quartilsdifferenz und Standardabweichung der Lebenszeit T an. Benutze die Tabelle 6.6.c (auf Seite 138) und die Ergebnisse im Kapitel 6.3 (auf Seite 126) im Stahel (1999).

b) Die Halbwertszeit ist die Zeit, die es dauert, bis von N Atomen $N/2$ zerfallen sind (N gross). Welchem Lagemass entspricht die Halbwertszeit?

c) Welcher Anteil der Cäsium-137-Nuklide hat eine Lebenszeit im Bereich Erwartungswert $\pm$ Standardabweichung bzw. im Bereich Erwartungswert $\pm$ zwei Standardabweichungen?

2. Aus einer Ammoniumlösung nehmen wir 16 unabhängige Proben und bestimmen deren Ammonium-Konzentration (X_i, in μgNH_4-N/l) mit einem Gerät, von dem wir wissen, dass es einen normalverteilten Fehler mit Standardabweichung 10 μgNH_4-N/l hat. Um untenstehende Aufgaben zu lösen, müssen wir noch folgendes über die Normalverteilung wissen:

- Die Summe zweier unabhängiger, normalverteilter Variablen ist normalverteilt: $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, X und Y unabhängig, $Z = X + Y$ $\Longrightarrow Z \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
- Wird zu einer normalverteilten Variablen eine Konstante addiert, so bleibt sie normalverteilt: $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Z = X + c$ $\Longrightarrow Z \sim \mathcal{N}(\mu_X + c, \sigma_X^2)$
- Wird eine normalverteilte Variable mit einer Konstanten multipliziert, so bleibt sie normalverteilt: $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Z = c \cdot X$ $\Longrightarrow Z \sim \mathcal{N}(c \cdot \mu_X, c^2 \cdot \sigma_X^2)$

Wir nehmen nun an, dass die Konzentration der Lösung bekannt ist, nämlich 200 μgNH_4-N/l.

a) Gemäss Aufgabenstellung gilt: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wie gross sind μ und σ?

b) Sei $Y = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}$. Wie ist Y verteilt? (Benutze einerseits die obenstehenden Informationen über die Normalverteilung sowie die Rechenregeln für Momente. Beachte: $\mu = E[X_1]$ und $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$.)

c) Wie gross ist $P[Y > 0.8]$? (Für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, also standardnormalverteilt, liegt eine Tabelle für $P[Z \leq z] = \Phi(z)$ bei.)

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_1 > 208$ ist? (Beachte folgendes: $P[X_1 > 208] = P[\frac{X_1 - \mu}{\sigma} > \frac{208 - \mu}{\sigma}] = P[Y > \frac{208 - \mu}{\sigma}]$.)

e) Wie ist $\overline{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$ verteilt?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X} > 208$ ist?

g) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\overline{X} > 204.9$ ist? (Nebenbemerkung: $204.9 = 200 + 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{16}}$)

h) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass $195.1 \leq \overline{X} \leq 204.9$? (Aus der Tabelle oder aus dem vorherigen Resultat durch Symmetrieüberlegungen.)

3. Der durchschnittliche Puls von Männern unter 30 Jahren beträgt 80.2 Schläge pro Minute. Bei vierzehn zufällig ausgewählten Sportlern der gleichen Altersgruppe werden die folgenden Werte gemessen:

68 73 83 76 66 82 74 81 78 81 75 67 85 82

Den unbekannten durchschnittlichen Puls von Sportlern dieser Altersgruppe bezeichnen wir mit μ.

a) Teste die Hypothese $H_0 : \mu = 80.2$ gegen die folgenden Alternativen auf dem 5%-Niveau: (i) $H_1 : \mu \neq 80.2$, (ii) $H_2 : \mu < 80.2$

b) Berechne die 95%-Vertrauensintervalle, die den obigen Tests entsprechen. (Hinweis für das einseitige Vertrauensintervall: wende den Dualitätssatz an.)

4. Umweltingenieure sind daran interessiert, festzustellen, ob die Reinigung eines Sees erfolgreich war. Dazu haben sie 12 Wasserproben vor der Reinigung und 12 Wasserproben nach der Reinigung jeweils an zufällig ausgewählten Orten aus dem See (Wasseroberfläche) entnommen und deren Gehalt an gelöstem Sauerstoff (in ppm) bestimmt. Weil der Gehalt an gelöstem Sauerstoff von der Tageszeit abhängt, wurden alle Messungen um 14.00 Uhr entnommen. War die Reinigung des Sees erfolgreich?
(Bemerkung: Die Reinigung des Sees ist in diesem Fall erfolgreich, falls der Gehalt an gelöstem Sauerstoff kleiner wird! Viele Nährstoffe bewirken grosses Algenwachstum. Die grosse Algendichte ist für den erhöhten Sauerstoffgehalt verantwortlich.)

vorher	11.0	11.2	11.2	11.2	11.4	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	11.9	12.1
nachher	10.2	10.3	10.4	10.6	10.6	10.7	10.8	10.8	10.9	11.0	11.1	11.3

a) Handelt es sich um verbundene (gepaarte) oder um unabhängige Stichproben?

b) Stelle die Daten graphisch dar.

c) Erscheint ein einseitiger oder ein zweiseitiger Test angebrachter?

d) Führe den t-Test durch und gib die Nullhypothese, die Alternative und den Verwerfungsbereichs an. Kennzahlen
vorher: $\overline{x} = 11.542$, $s_x = 0.348$
nachher: $\overline{y} = 10.733$, $s_y = 0.331$

95%-Quantile der t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden.

FG	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{\nu,0.95}$	6.31	2.92	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81
FG	15	20	25	30	40	50	60	100	200	∞
$t_{\nu,0.95}$	1.75	1.73	1.71	1.70	1.68	1.68	1.67	1.66	1.65	1.65

Abgabe: Montag, 26. Juni, in der Pause der Vorlesungsstunde