Übung 6

1. **a)** Wir betrachten einen fairen Würfel, der auf 4 Seiten blau und auf zwei Seiten rot angemalt ist.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit "blau-rot-blau" in dieser Reihenfolge zu würfeln (bei 3 Würfen)?
2. Auf wieviele Arten kann man zweimal "blau" und einmal "rot" würfeln (wieviele verschiedene Reihenfolgen für "blau" und "rot" gibt es)?
3. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zweimal "blau" und einmal "rot" zu würfeln?
4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dreimal "blau" und viermal "rot" zu würfeln (bei 7 Würfen)?

b) Wir betrachten nun eine faire Münze.

1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in zehn Würfen genau zweimal Kopf zu werfen?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in zehn Würfen weniger als dreimal Kopf oder weniger als dreimal Zahl zu werfen?
3. Jemand behauptet, hellsehen zu können. In einem Versuch sagt er acht von zehnmal richtig voraus, wie die Münze fallen wird. Was sagst Du dazu?

2. Bei einer Untersuchung werden Wasserproben auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte der Probe zu einer Sammelprobe zusammenzufassen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzelproben beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?

b) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

c) Wieviele Analysen werden „im Durchschnitt" für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathcal{E}\langle Y\rangle$)?
Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben „im Durchschnitt" eingespart?

d) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von Y.

3. Um die Anzahl Forellen N in einem See zu bestimmen, wird folgendermassen vorgegangen:
In einem ersten Schritt werden 500 Forellen gefangen, markiert und wieder ausgesetzt.
In einem zweiten Schritt werden nochmals 200 Forellen gefangen und die Anzahl X der markierten Forellen bestimmt.

a) Für X wird oft eine Binomialverteilung angenommen, $X \sim \text{Bin}(n, p)$. (p bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass ein im zweiten Schritt gefangener Fisch markiert ist.)
Wie gross ist n? Wie gross ist der Parameter p, wenn die Gesamtzahl der Forellen im See $N = 2000$ bzw. $N = 5000$ ist?

b) Die tatsächliche Beobachtung für X ergibt den Wert 40. Gib eine vernünftige Schätzung für den Parameter p an und leite daraus eine Schätzung für die Gesamtzahl N der Forellen im See ab.

c) Nenne Argumente, die gegen die Annahme sprechen könnten, dass X binomialverteilt ist. Nenne zudem mögliche Ursachen für systematische Fehler der Schätzung.

4. Eine gewisse Konzentration einer Chemikalie im Wasser führt bei 20% der Fische zum Tod innerhalb von 24 Stunden. Weil die Chemikalie im Wasser sehr schwierig nachzuweisen ist, verwendet man Fische als Bioindikatoren. Dazu werden 5 Fische in einen Wassertank gebracht, dessen Wasser mit der oben erwähnten Chemikalie und Konzentration verschmutzt ist (wir nehmen an, dass sich die Fische unabhängig voneinander verhalten).

a) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass alle 5 Fische 24 Stunden überleben.

b) Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 2 Fische 24 Stunden überleben.

c) Gib Erwartungswert und Varianz der Anzahl überlebender Fische an.

d) In Teilaufgabe a) haben wir gesehen, dass “zu oft” alle Fische überleben werden. Deshalb ist diese Anordnung noch nicht als Bioindikator geeignet. Wieviele Fische müssten in den Wassertank gegeben werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0.05 alle Fische 24 Stunden überleben?

Abgabe: Montag, 15. Mai in der Pause der Vorlesungsstunde