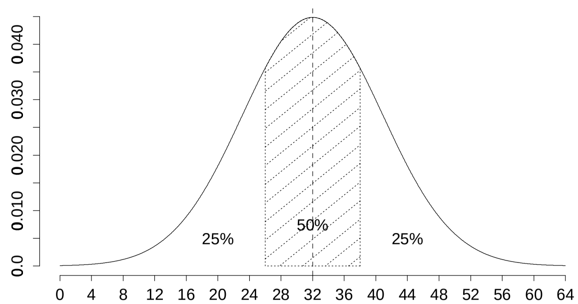
Musterlösung zu den freiwilligen Aufgaben

1. a) Skizze:



b) X bezeichne den Schwermetallgehalt in Kopfsalaten. Es gilt:

$$X \sim \mathcal{N}\langle \mu, \sigma^2 \rangle, \qquad \text{mit } \mu = 32 \text{ und } \sigma^2 \text{ unbekannt.}$$

Ferner gilt (vgl. Skizze):

$$\begin{aligned} P\langle X \le 26 \rangle &= F^{(X)}\langle 26 \rangle = 0.25 \\ \text{bzw. } P\langle X \le 38 \rangle &= F^{(X)}\langle 38 \rangle = 0.75 \end{aligned}$$

Im Prinzip kann σ mit dem Computer berechnet werden: Wir lassen ein Statistikpaket aus allen Normalverteilungen mit $\mu = 32$ diejenige suchen, für die gilt: $F^{(X)}\langle 38 \rangle = 0.75$. Das σ der so bestimmten Normalverteilung ist das gesuchte σ. Ohne Computer geht man aus praktischen Gründen (Tabelle!) normalerweise zur standardisierten Zufallsvariablen $Z = (X - \mu_X)/\sigma_X$ über. Es gilt: $Z \sim \mathcal{N}\langle 0, 1 \rangle$. Konkret geht das so (vgl. Buch S.134):

$$\begin{aligned} F^{(X)}\langle x \rangle &= F^{(Z)}\langle z \rangle = F^{(Z)}\left\langle \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right\rangle = \Phi\left\langle \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right\rangle \\ F^{(X)}\langle 38 \rangle &= F^{(Z)}\left\langle \frac{38 - 32}{\sigma_X} \right\rangle = F^{(Z)}\left\langle \frac{6}{\sigma_X} \right\rangle = \Phi\left\langle \frac{6}{\sigma_X} \right\rangle = 0.75 \end{aligned}$$

In der Tabelle S. 134 im Buch ist $1 - \Phi\langle z \rangle$ tabelliert, also

$$1 - \Phi\left\langle \frac{6}{\sigma_X} \right\rangle = 0.25$$

Aus der Tabelle lesen wir für z den (interpolierten) Wert 0.675 ab.

$$z = \frac{6}{\sigma_X} = 0.675 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_X = 8.89$$

c) Wieder gehen wir zur standardisierten Zufallsvariablen Z über.

$$\begin{aligned} P\langle X > 45 \rangle &= P\left\langle Z > \frac{45 - 32}{8.89} \right\rangle \\ &= P\langle Z > 1.46 \rangle \\ &= 1 - P\langle Z \le 1.46 \rangle \\ &= 1 - \Phi\langle 1.46 \rangle \\ &= 0.0721 \quad \text{(aus Tabelle)} \end{aligned}$$

d) Der Bleigehalt X ist gemäss Aufgabestellung $\mathcal{N}\langle 32, 8.89^2 \rangle$ verteilt:

$$X \sim \mathcal{N}\langle 32, 8.89^2 \rangle$$

Die Verteilung des arithmetischen Mittels $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ folgt aus der Verteilung für die X_i:

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left\langle 32, \frac{8.89^2}{n} \right\rangle$$

Wenn das arithmetische Mittel mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% um nicht mehr als 5 ppm vom wahren Wert abweichen soll, muss gelten

$$1.96 \cdot \sigma\langle \overline{X} \rangle \le 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 1.96 \cdot \sqrt{\frac{8.89^2}{n}} \le 5 \quad \Longleftrightarrow \quad n \ge \left(1.96 \cdot \frac{8.89}{5}\right)^2 = 12.1$$

Es müssen 13 Bestimmungen geplant werden.

2. a)

- Modellannahme: $X_i \sim \mathcal{N}\langle \mu, \sigma^2 \rangle, i = 1, \dots n;$ i. i. d.
- $H_0 : X_i \sim \mathcal{N}\langle \mu_0, \sigma_0^2 \rangle, i = 1, \dots n;$ mit $\mu_0 = 8, \sigma_0^2$ unbekannt.
- $H_A : X_i \sim \mathcal{N}\langle \mu_A, \sigma_0^2 \rangle, i = 1, \dots n;$ mit $\mu_A \neq 8, \sigma_0^2$ wie unter H_0.
- Teststatistik:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim \text{t-verteilt mit } (9-1) \text{ Freiheitsgraden}$$

- Verwerfungsbereich: $K = \{|T| \ge 2.31\}$

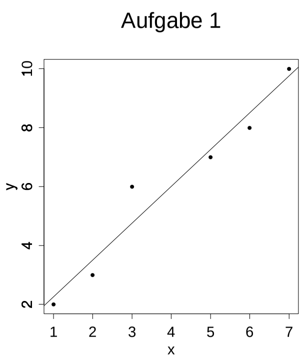
$$t = \frac{\bar{x} - 8}{0.937/\sqrt{9}} = 1.66$$

b) Der Wert t der Teststatistik liegt im Annahmebereich von H_0, d. h. mit diesen Daten kann (zumindest mit dem t-Test) keine signifikante Abweichung der Verschlusszeit von der Einstellung nachgewiesen werden.

c) Wie der Test unter b) gezeigt hat, ist der Parameter $\mu = 8$ mit den Daten verträglich, d. h. er liegt im Vertrauensintervall für den Erwartungswert μ der Verschlusszeit.

d) Der t-Test ist sehr empfindlich auf „Ausreisser“. Mit 10.89 haben wir einen „Ausreisser“ im Datensatz. Dieser einzelne Wert beeinflusst den Wert der Teststatistik übermässig, was dazu führt, dass das Ergebnis des t-Tests kaum mehr sinnvoll zu interpretieren ist (Ausreisser bedeuten eine grobe Abweichung von der Normalverteilungsannahme).
Besser geeignet wäre hier der Vorzeichen- oder der Wilcoxon-Test. Beide sind robust, d. h. ein einzelner „Ausreisser“ verändert das Testergebnis nicht oder nur unwesentlich.

3. Streudiagramm:



Schätzungen: $\widehat{\beta} = 1.25$, $\widehat{\sigma}(\widehat{\beta}) = 0.14$, $\widehat{\alpha} = 1$, $\widehat{\sigma}(\widehat{\alpha}) = 0.64$ und $\widehat{\sigma}_e = 0.75$.

Nullhypothese:	$\beta_0 = 2$	$\alpha_0 = 0$
Alternative:	$\beta \neq 2$	$\alpha \neq 0$
Teststatistik:	$T = (\widehat{\beta} - 2)/\widehat{\sigma}(\widehat{\beta})$	$T = \widehat{\alpha}/\widehat{\sigma}(\widehat{\alpha})$
Unter H_0 gilt:	$T \sim t_4$	$T \sim t_4$
5%-Verwerfungsbereich :	$\mathcal{K} = \{\lvert T\rvert > t_{4,\,0.975} = 2.776\}$	$\mathcal{K} = \{\lvert T\rvert > 2.776\}$
Wert der Teststatistik:	$T = -5.36 \in \mathcal{K}$	$T = 1.56 \notin \mathcal{K}$
95%-Konfidenzintervall:	[0.86,1.64]	[-0.78,2.78]

Die Nullhypothese $\alpha_0 = 0$ wird beibehalten. Wir können das vereinfachte Modell $y = \beta x + \varepsilon$ **(Einfache lineare Regression durch den Nullpunkt)** benutzen.

4. a) Dot Plot lässt vermuten, dass sich die 3 Gruppen nicht signifikant unterscheiden. *Legende: + = arithmetischer Mittelwert.*
Als extreme Beobachtung kann höchstens der kleinste Wert in der zweiten Gruppe betrachtet werden (43. Beobachtung: 65 Punkte).
Die Streuung der Prüfungsergebnisse ist in den drei Gruppen ungefähr gleich. Die Voraussetzung gleicher Fehlervarianz scheint also nicht verletzt zu sein. Die Verteilung der Daten in den einzelnen Gruppen ist ungefähr symmetrisch. Dies bedeutet, dass auch die Verteilung der geschätzten Fehler (Residuen) ungefähr symmetrisch

ist. Ob die Verteilung der Residuen annähernd einer Normalverteilung folgt (das Modell setzt voraus, dass die Fehler normalverteilt sind), kann aufgrund eines Dot-Plots der Daten nicht entschieden werden. Dazu muss im Rahmen der Residuenanalyse der Normal-Plot der Residuen betrachtet werden. (vgl. Stahel, Kap. 11.2 Quantil-Quantil Diagramm)

b) Wir betrachten das Modell der einfachen Varianzanalyse

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

und testen die Nullhypothese, dass es zwischen den Gruppen keine Unterschiede gibt:
$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Aus der Varianzanalyse-Tabelle sieht man, dass es zwischen den Gruppen **keinen** signifikanten Unterschied gibt. Der P-Wert zum F-Wert von `ZEIT$` ist viel grösser als 0.05:

$$F = \frac{MS_G}{MS_E} = \frac{15.460}{487.378} = 0.032 < F_{2,\,63,\,0.95} = 3.14$$

Ein Einfluss der Tageszeit auf die Leistung der Studierenden bei der Prüfung ist also mit diesen Daten nicht feststellbar.

```
DEP VAR:  PUNKTE     N:     66  MULTIPLE R: 0.032  SQUARED MULTIPLE R: 0.001

                        ANALYSIS OF VARIANCE
SOURCE       SUM-OF-SQUARES   DF  MEAN-SQUARE     F-RATIO       P

ZEIT$               30.920     2       15.460       0.032       0.969
ERROR            30704.838    63      487.378

WARNING: CASE     43 IS AN OUTLIER (STUDENTIZED RESIDUAL =     -2.986)
```

5. a) Unter $H_0 : \mu = \mu_0 = 200$ ist $X_i \sim \mathcal{N}(200, 10^2)$.
Also ist $\overline{X} \sim \mathcal{N}(200, \sigma^2_{\overline{X}})$, mit $\sigma_{\overline{X}} = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2.5$.

b) $P[\overline{X} \leq \overline{x}_{\text{unten}}] = P[\frac{\overline{X}-200}{10} \leq \frac{\overline{x}_{\text{unten}}-200}{2.5}] = \Phi(\frac{\overline{x}_{\text{unten}}-200}{2.5})$
Da $\Phi(z) = 2.5\%$ für $z = -1.96$, muss gelten: $\frac{\overline{x}_{\text{unten}}-200}{2.5} = -1.96 \implies \overline{x}_{\text{unten}} = 195.1$

c) Nach obiger Rechnung ist $P[\overline{X} > 195.1] = 1 - P[\overline{X} \leq 195.1] = 97.5\%$. Aus Symmetriegründen (um $\mu = 200$) ist $P[195.1 \leq \overline{X} \leq 204.9] = 95\%$, also liegt $\overline{X}$ mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $[195.1, 204.9]$.

d) Das gemessene $\overline{x} = 203.7$ liegt in $[195.1, 204.9]$, also verwerfen wir die Nullhypothese nicht: die Konzentration im Eimer kann mit dem Grenzwert übereinstimmen.

e) Gemäss Handout:
Annahmebereich $= [\mu_0 \pm 1.96 \cdot \sigma_{\overline{X}}] = [200 \pm 1.96 \cdot 2.5] = [195.1, 204.9]$
Das ist derselbe Bereich wie oben! Wir haben in dieser Aufgabe also hergeleitet, wie man auf den z-Test kommt.

f) Einseitiger Test:
$H_0 : \mu = \mu_0 = 200 \qquad H_A : \mu > \mu_0$
$T = \frac{\overline{x}-200}{2.5} = 1.48$
$z_{0.95} = 1.65$
$T < z_{0.95} \implies H_0$ nicht verwerfen: es kann sein, dass der Grenzwert nicht

überschritten wurde.
Verwerfungsbereich: $[\mu_0 + z_{0.95} \cdot \sigma_{\overline{X}}, \infty) = [200 + 1.65 \cdot 2.5, \infty) = [204.1, \infty)$
Ab einem $\overline{x} > 204.1$ verwerfen wir also die Nullhypothese.

6. Quelle: E. Weber (1972): „Grundriss der biologischen Statistik", S. 515

Körperbautyp des Ehemannes	Körperbautyp der Ehefrau leptosom	athletisch	pyknisch	insges.	in %
leptosom	26 (12.30)	10 (27.45)	17 (13.25)	53	23.66
athletisch	16 (31.56)	103 (70.43)	17 (34.00)	136	60.71
pyknisch	10 (8.13)	3 (18.13)	22 (8.75)	35	15.63
insgesamt	52	116	56	224	100.00
in %	23.21	51.79	25.00	100.00	

a) Fehlende Werte der Tabelle:
$n_{21} = n_{\cdot 1} - n_{11} - n_{31} = 52 - 26 - 10 = 16$
$n_{32} = n_{3\cdot} - n_{31} - n_{33} = 35 - 10 - 22 = 3$, usw.
$n_{1\cdot} = n_{11} + n_{12} + n_{13} = 26 + 10 + 17 = 53$
$n = n_{\cdot\cdot} = n_{\cdot 1} + n_{\cdot 2} + n_{\cdot 3} = 52 + 116 + 56 = 224$

b) Die erwarteten Anzahlen $\widehat{n}_{ij}$ sind in Klammer hinter den Beobachtungszahlen angegeben.
Unter der Nullhypothese der Unabhängigkeit gilt (z.B.):

$$P\big[\text{Mann ist leptsom und Frau ist athletisch}\big] = P\big[\text{Mann leptsom}\big] \cdot P\big[\text{Frau athletisch}\big]$$

$$\text{d.h. } \widehat{n}_{12} = n \cdot \frac{n_{1\cdot}}{n} \cdot \frac{n_{\cdot 2}}{n} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 2}}{n} = \frac{53 \cdot 116}{224} = 27.45$$

Analog: $\widehat{n}_{11} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 1}}{n} = \frac{53 \cdot 52}{224} = 12.30$, $\widehat{n}_{13} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 3}}{n} = \frac{53 \cdot 56}{224} = 13.25, \ldots$

c) Zuerst muss man die Grösse $\frac{(n_{ij} - \widehat{n}_{ij})^2}{\widehat{n}_{ij}}$ berechnen:

Körperbautyp des Ehemannes	Körperbautyp der Ehefrau leptosom	athletisch	pyknisch
leptosom	15.26	11.09	1.06
athletisch	7.67	15.06	8.50
pyknisch	0.43	12.63	20.06

Sei k die Anzahl der Zeilen und l die Anzahl der Spalten der Kontingenztafel:

$$\text{Teststatistik: } \chi^2 = \sum_{i=1}^{k=3} \sum_{j=1}^{l=3} \frac{(n_{ij} - \widehat{n}_{ij})^2}{\widehat{n}_{ij}} = 91.76$$

Freiheitsgrade: $\nu = (k-1) \cdot (l-1) = 2 \cdot 2 = 4$ (Wir haben gerade 4 Zahlen benutzt, um das Innere der Kontigenztafel zu ergänzen). Wegen $\chi^2 = 91.76 > \nu + 2\sqrt{2\nu} = 9.656$ wird die Annahme der Unabhängigkeit verworfen. Zwischen den Körperbautypen der Ehepartner in der hessischen Landbevölkerung besteht ein statistisch gesicherter Zusammenhang.
Es ist möglich diesen Test mit S-plus durchführen:

```
> kt<- rbind(c(26,10,17),c(16,103,17),c(10,3,22))
> chisq.test(kt)
        Pearson's chi-square test without Yates' continuity correction
data:  kt
X-squared = 91.7602, df = 4, p-value = 0
```


d) Die Abweichung in der ij-Zelle zwischen dem beobachteten Wert n_{ij} und dem erwarteten Wert $\widehat{n}_{ij}$ ist signifikant wenn (Faustregel)

$$|n_{ij} - \widehat{n}_{ij}| \geq 2\sqrt{\widehat{n}_{ij}} \quad \text{gilt, d.h.} \quad \frac{(n_{ij} - \widehat{n}_{ij})^2}{\widehat{n}_{ij}} \geq 4$$

Die stärksten signifikanten Abweichungen liegen auf der Diagonalen. Es ist damit für die vorliegenden Daten erwiesen, dass Heiraten unter Personen mit gleichem Körperbautyp häufiger vorkommt.

7. Die $X_i, i = 1, 2, \ldots, 6$, sind Poisson-verteilt mit je demselben Parameter $\lambda_i = \lambda$ und unabhängig. Die ZV $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ ist also Poisson-verteilt mit Parameter 6λ.

a) Mit Hilfe von Tabelle 9. 1. c wird für $X = 2 + 3 + 1 + 5 + 6 + 3 = 20$ das 95%-Vertrauensintervall für $\underline{6\lambda}$ $[c_1, c_2] = [12.22\ , 30.89]$ oder mit der Faustregel $20 \pm 2\sqrt{20} = [11.06, 28.94]$, also ist das 95%-Vertrauensintervall für $\lambda = [c_1/6, c_2/6]$ $= [2.04\ , 5.15]$ (bzw. [1.84,4.82]).

b) Nullhypothese $H_0 : X_i$ i.i.d. $Poi(\lambda_0 = 6)$
Alternative $H_A : \lambda_0 < 6$ (Abnahme)
Teststatistik: $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$, unter H_0 gilt: $X \sim Poi(36)$
Kritischer Wert des einseitigen 2.5%-Niveau-Testes: $36 - 2\sqrt{36} = 24$.
Kritischer Bereich $\mathcal{K} = \{X < 24\}$.
$X = 20 \in \mathcal{K}$. Wir können sagen, dass eine signifikante Abnahme der Substanz stattgefunden hat.

Andere Lösungsweg:
Da das einseitige 97.5%-Vertrauensintervall [0 , 5.15] beträgt und 6 nicht in diesem liegt, muss die Nullhypothese $\lambda_0 = 6$ des einseitigen 2.5%-Niveau-Testes verworfen werden.

8. **a)** Da $f_{T_i}(x)$ eine Dichtefunktion ist, gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f_{T_i}(x) = 1$.

$$\int_0^\infty c_i x e^{-\lambda_i x} dx = -c_i x \frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i x} \Big|_0^\infty + c_i \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i} dx = 0 + \frac{-c_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i x} \Big|_0^\infty = \frac{c_i}{\lambda_i^2} \Longrightarrow c_i = \lambda_i^2$$

b) Sei $F_{T_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{T_i}(y) dy$ die kumulative Verteilungsfunktion von T_i.
Für $x < 0$ ist $F_{T_i}(x) = 0$ und für $x \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} F_{T_i}(x) &= \int_0^x c_i y e^{-\lambda_i y} dy = -c_i y \frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i y} \Big|_0^x - \frac{c_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i y} \Big|_0^x \\ &= -\frac{c_i}{\lambda_i} x e^{-\lambda_i x} + 0 - \frac{c_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i x} + 1 = 1 - e^{-\lambda_i x}(1 + \lambda_i x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow P[T_1 > 900] = 1 - P[T_1 \leq 900] = 1 - F_{T_1}(900) = e^{-\frac{900}{600}}\left(1 + \frac{900}{600}\right) = \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

Analog $P[T_2 > 900] = \frac{14}{5} e^{-9/5}$ und $P[T_3 > 900] = \frac{13}{4} e^{-9/4}$.

$$\begin{aligned} P[\text{mindestens 900 Stunden ohne Ausfall}] &= P[T_1 > 900, T_2 > 900 \text{ und } T_3 > 900] \\ &= P[T_1 > 900] \cdot P[T_2 > 900] \cdot P[T_3 > 900] \\ &= \frac{91}{4} e^{-111/20} = 0.09 \end{aligned}$$

9. H_0 : Grössen sind stochastik unabhängig.
Teststatistik:

$$D = \frac{(N_{11} \cdot N_{22} - N_{12} \cdot N_{21})^2 \cdot N}{N_{1\cdot} \cdot N_{2\cdot} \cdot N_{\cdot 1} \cdot N_{\cdot 2}} = 1.897$$

	Defekt	Nicht defekt	
A	32	80	132
B	35	58	93
	67	138	205

Unter H_0 ist $D \sim \chi^2_1, (\nu = 1$ Freiheitgrad$) \Longrightarrow \mathcal{K} = \{D > 1 + 2\sqrt{2} = 3.82\}$.
$D = 1.897 \notin \mathcal{K}$, d.h. Die Nullhypothese wird *nicht* verworfen.