Spektraldichte von linear gefilterten Prozessen

Spectral density of linearly filtered processes

Satz Theorem

Sei $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationär mit Erw.wert μ_Y (expected value)
Consider, stationary

Autokovarianzfkt. $R_Y(\cdot)$ (autocovariance fct.)

und Spektraldichte $f_Y(\cdot)$.
and, spectral density

Sei $X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k Y_{t-k}$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$. Dann ist
Consider

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationär mit
stationary with

(i) $\mathbb{E}[X_t] = H(0)\mu_Y$

(ii) $R_X(k) = \sum_{j,l} c_j c_l R_Y(k-l+j)$

(iii) $f_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda)$

Proof
Beweis:

(i) $E[X_t] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mu_Y = H(0)\mu_Y$

(ii) Sei $\mu_Y = 0$.

$$R_X(k) = E[X_t X_{t+k}] = \sum_{j,l} c_j c_l E[Y_{t-j} Y_{t+k-l}]$$

$$= \sum_{j,l} c_j c_l R_Y(k-l+j)$$

(iii) $R_X(k) \overset{(ii)}{=} \sum_j c_j (c * R_Y)(k+j) = c_- * (c * R_Y)(k)$

$(c_-)_j = c_{-j}$

Now

Jetzt: $R_Y = \hat{f}_Y$ (FT von f_Y)

back transform

$c = \hat{H}/2\pi$ (Fourier-Rücktransformierte von H)

$c_- = \hat{H}(-.)/2\pi$ (FRT von $H(-.)$)

convolution formulae

Faltungsformeln: $c * R_Y = \widehat{H \cdot f_Y}$

and

und $R_X = c_- * \widehat{H \cdot f_Y} = \widehat{H(-.) \cdot H \cdot f_Y}$

i.e.

d.h. $R_X(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ih\lambda} \underbrace{H(-\lambda) \cdot H(\lambda)}_{=|H(\lambda)|^2} \cdot f_Y(\lambda)\, d\lambda$

Thus, with Theorem from

Also mit Satz von Herglotz, Bochner:

$$f_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 \cdot f_Y(\lambda)$$

$\blacksquare$