Multi-step predictions in ARMA models

Mehr-Schritt Vorhersagen in ARMA-Modell

aim prediction of given

Ziel: Vorhersage von X_{t+m-1} gegeben $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

$(m \geq 1)$

assumption: is with

Ann: $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist ARMA(p,q) mit

$$\Phi(z) \neq 0 \quad (|z| \leq 1), \quad \Theta(z) \neq 0 \quad (|z| \leq 1)$$

Then:

Dann: $$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

and independent of

ε_t i.i.d. und unabhängig von $\{X_s ; s < t\}$

Best prediction:

Beste Vorhersage:

$$\widehat{X}_{t+m-1 \mid -\infty:(t-1)} \overset{\text{Kap. 1.3}}{=} E[X_{t+m-1} \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \underbrace{E[X_{t+m-1-j} \mid X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]}_{= \widehat{X}_{t+m-1-j \mid -\infty:(t-1)}} + \sum_{j=m}^{\infty} \gamma_j X_{t+m-1-j}$$

thus:

also: $$\widehat{X}_{t+m-1 \mid -\infty:(t-1)} = \underline{\sum_{j=1}^{m-1} \gamma_j \widehat{X}_{t+m-1-j \mid -\infty:(t-1)}}$$

$$+ \underline{\sum_{j=m}^{\infty} \gamma_j X_{t+m-1-j}}$$

for see above

für $m = 2$: linear in $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ ($m=1$: siehe vorher)

recursively for all

$\rightsquigarrow$ rekursiv für alle $m \geq 1$: linear in $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

Corollary

Korollar

Consider

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ARMA (p,q) with mit $\Phi(z)\neq 0$, $\Theta(z)\neq 0$ für $|z|\leq 1$.

Then:

Dann:

$$\hat{X}_{t+m-1|-\infty:(t-1)} = \tilde{X}_{t+m-1|-\infty:(t-1)}$$

i.e. best linear prediction is best prediction

d.h. lineare Prognose ist beste Prognose

practical procedure:

Durchführung:

$$\hat{X}_{t+m-1|-\infty:(t-1)} = \sum_{j=1}^{m-1} \phi_j \hat{X}_{t+m-1-j|-\infty:(t-1)} + \sum_{j=m}^{p} \phi_j X_{t+m-1-j}$$

$$+ \sum_{h=m}^{q} \theta_h \varepsilon_{t+m-1-h}$$

intuitively clear since $\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+m-1}$ are not predictable

(intuitiv klar, da $\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+m-1}$ nicht vorhersagbar)

Computation as in 1-step prediction and recursively

Berechnung wie bei 1-Schritt Prognose und rekursiv

Remark for

Bem: für $m > \max(p,q)$:

$$\hat{X}_{t+m-1|-\infty:(t-1)} = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \hat{X}_{t+m-1-j|-\infty:(t-1)}$$

i.e. solution of deterministic AR(p) - skeleton

d.h. Lösung von deterministischem AR(p) - Skelett

Thus:

Also: $X_{t+m-1|-\infty:(t-1)} \xrightarrow{\text{exponentially / exponentiell}} 0 = E[X_t]$ für $m \to \infty$