2 Nichtparametrische Tests

2.1 „Nichtparametrisch" heisst Vieles

a **Parametrisches Modell:**
Regression: $Y_i = h\langle \underline{x}_i; \underline{\theta} \rangle + E_i$
„struktureller Teil" $h\langle \underline{x}_i; \underline{\theta} \rangle \quad + \quad$ „zufälliger Teil" $E_i \sim \mathcal{F}\langle \sigma \rangle$
Im Prinzip ebenso:
Varianzanalyse, Glim, Diskriminanzanal., Zeitreihen, also „alles".

b **Nichtparametrische Tests:**
Verteilung der Zufallsvariablen nicht aus param. Familie.
klarer: „verteilungsfreie Tests".

c "Verteilungsfreier Tests" bedeutet auch:
Teststatistik, die für alle Verteilungen gleich verteilt ist.
Anpassungstests: Übereinstimmung von Daten mit best. Vert.
oder parametrischer Verteilungsfamilie. S. unten.

d Chiquadrat-Test für Anpassung

e „Nichtparametrische Regression":
Struktureller Teil (zunächst) nicht als Formel mit Parametern
sondern glatte, aber sonst beliebige Funktion.
$\longrightarrow$ Block über nichtparametrische Regression

f Dichte-Schätzung: Verteilung aus den Daten herauslesen.

2.2 Rang-Methoden

a Rangtests:

- Vorzeichen-Rangsummen-Test von Wilcoxon
  für 2 verbundene oder für eine einfache Stichprobe,

- Rangsummentest von Wilcoxon, Mann und Whitney
  (U-Test) für zwei unabhängige Stichproben.

Beobachtungen X_i mit einer Verteilung $\mathcal{F} \longrightarrow$
Ränge $R_i =$ immer die Zahlen 1 bis n (ausser bei Bindungen)

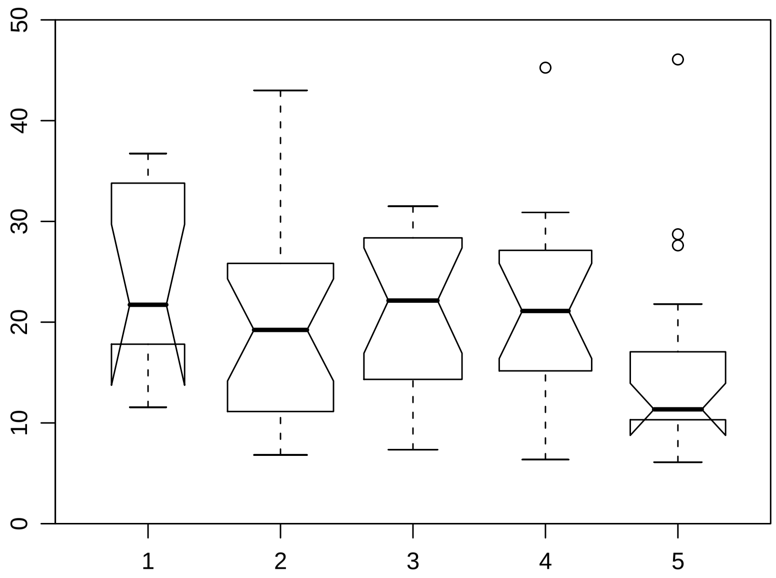
b Keine Voraussetzungen?

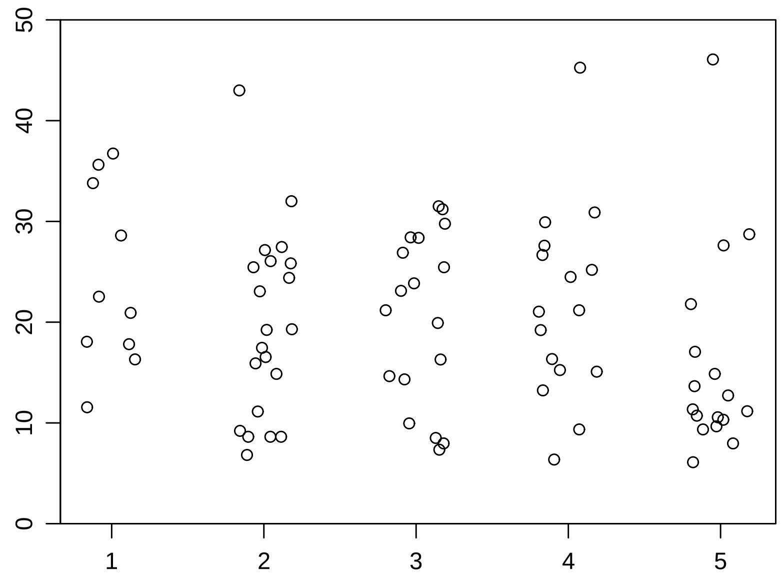
- Vorzeichen-Rangsummentest setzt Symmetrie voraus.
  Verbundene Stichproben $\longrightarrow$ Differenzen
  $\longrightarrow$ Symmetrie plausibel.

- U-Test setzt gleiche Vert. (verschoben)
  in beiden Stichproben voraus.
  $\longrightarrow$ kein Test für Gleichheit der Erw.werte bei
  ungleicher Streuung!

c Mehrere Stichproben $\longrightarrow$ einfache Varianzanalyse.
Idee: Rangtransformation, dann einfache Varianzanalyse.
Verteilung der Teststatistik unter H_0 neu bestimmen.

d Beispiel Nervenzellen.





e Test-Rezept:

H_0 : $Y_{h,i} \sim \mathcal{F}\,(i.i.d)$, $\mathcal{F}$ beliebig, für alle gleich.

H_A : $Y_{h,i} \sim \mathcal{F}_h$, $F_h\langle x\rangle = F_1\langle x - \delta_h\rangle$, mind. ein $\delta_h \neq 0$

U : Teststatistik: – Ränge $R_{h,i}$ bilden (innerhalb aller Beob.)
– $S_h = \sum_i R_{h,i}$, $T = \frac{12}{n(n+1)} \sum_h \frac{S_h^2}{n_h} - 3(n+1)$

$\mathcal{F}_0\langle U\rangle$: Verteilung von T hängt nicht von $\mathcal{F}$ ab.
Kleine Stichpr. $\longrightarrow$ Kombinatorik. Sonst asympt. χ^2-Vt.
Bei Bindungen $\longrightarrow$ aufgeteilten Rängen:
Korrektur an der Teststat.

f Beispiel:

```
> kruskal.test(medMaxL~treat, data=d.neurit)
Kruskal-Wallis rank sum test
data:  medMaxL by treat
Kruskal-Wallis chi-squared = 7.2709, df = 4,
  p-value = 0.1222
```

F-Test: $p = 0.208$.

Ohne 3 Ausreisser: F-Test $p= 0.022$, Kruskal-Wallis $p=0.044$.

g **Zweiweg-Varianzanalyse** Block-Versuch.

Beispiel: Verkäufe von 5 Produkten in 7 Läden

	A	B	C	D	E
1	5	4	7	10	12
2	1	3	1	0	2
3	16	12	22	22	35
4	5	4	3	5	4
5	10	9	7	13	10
6	19	18	28	37	58
7	10	7	6	8	7

= mehrere verbundene Stichproben

h Modell war

$$Y_{h,i} = \mu + \alpha_h + \beta_i + E_{h,i}$$

Wenn sich die Behandlungen h stark unterscheiden,
dann sind die Rangordnungen in allen Blöcken i gleich.
$\longrightarrow$ Friedman-Test

H_0 : $Y_{h,i} \sim \mathcal{F}_i$, unabhängig von h.

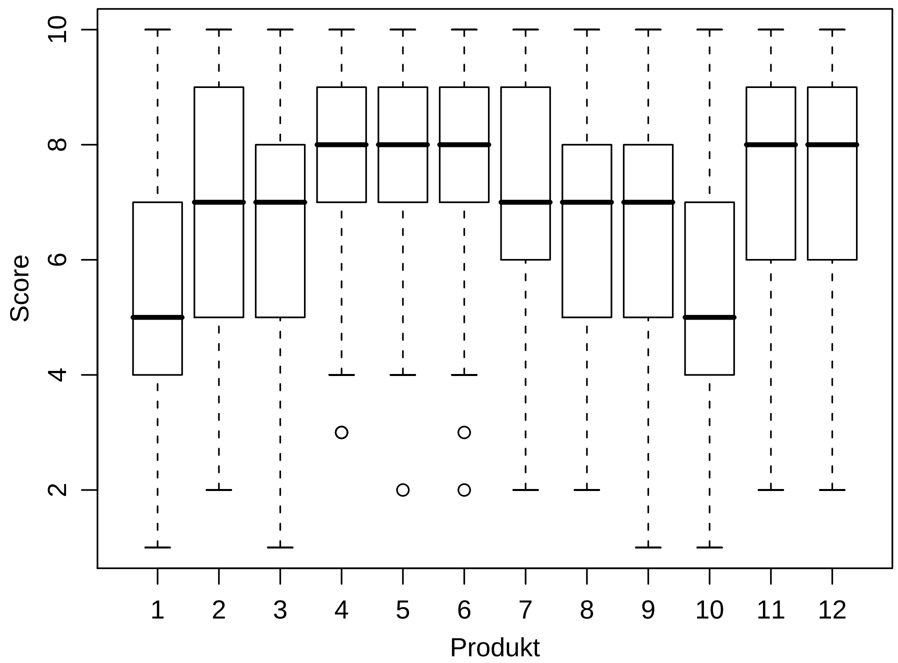
H_A : $Y_{h,i} = \mu + \alpha_h + \beta_i + E_{h,i}, \quad E_{h,i} \sim \mathcal{F}$.
Mindestens ein $\alpha_h \neq 0$.

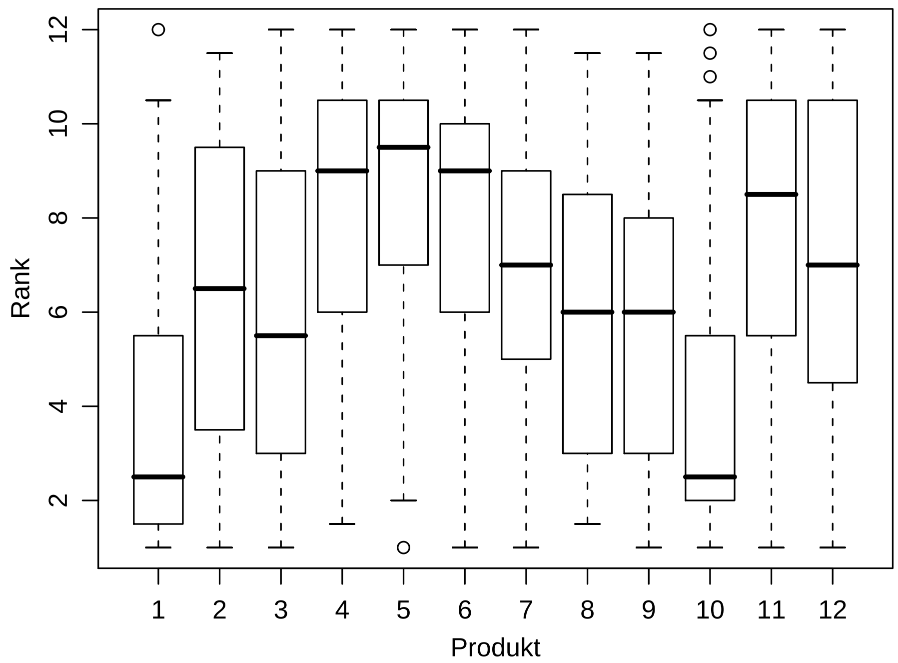
U : Ränge $R_{h,i}$ innerhalb jedes Blockes i.
$S_h = \sum_i R_{h,i}$,
$U = \sum_h (S_h - b(g+1)/2)^2$

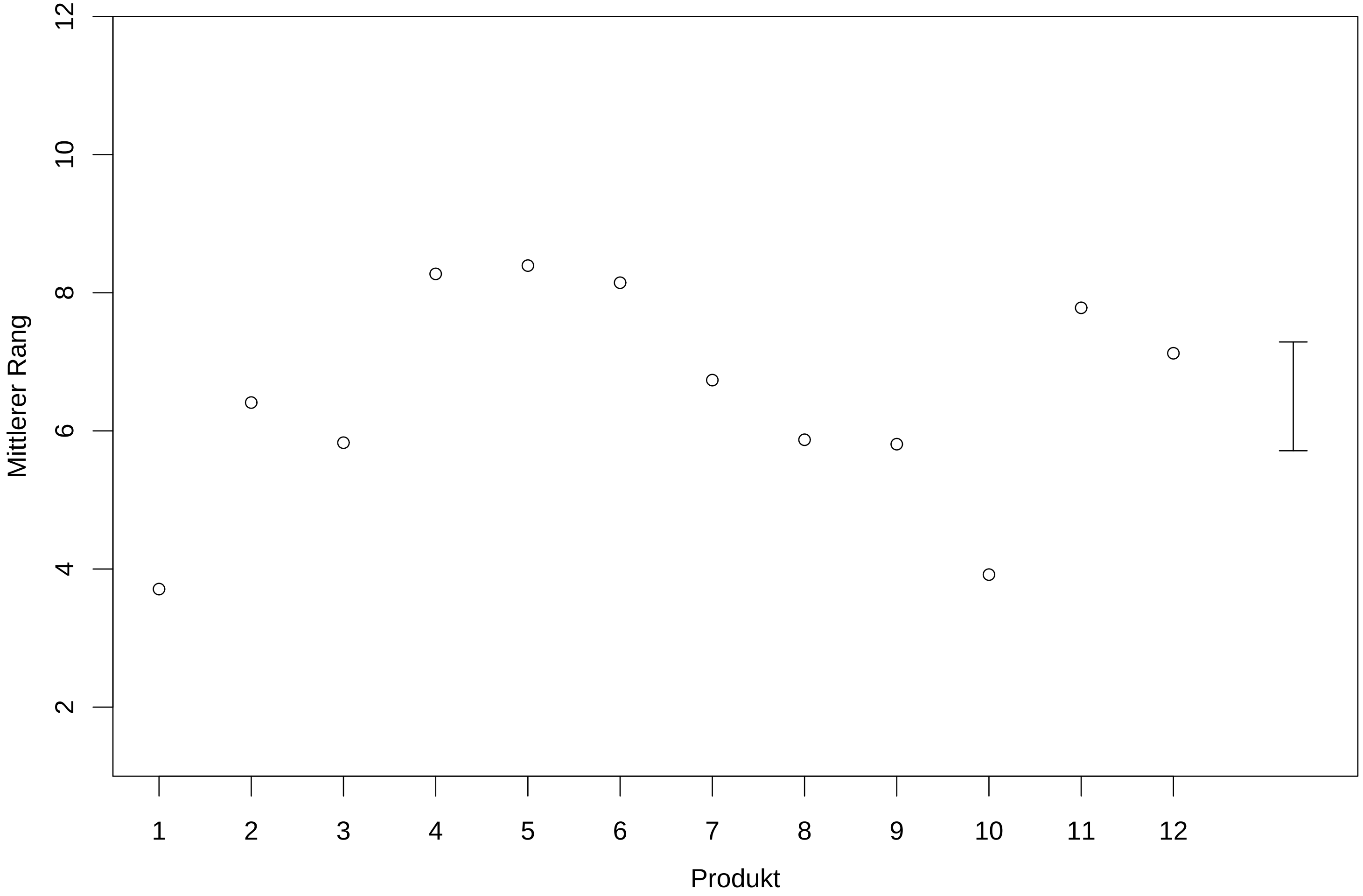
$\mathcal{F}_0\langle U \rangle$: $T = \frac{12}{bg(g+1)} U$
Verteilung: Kombinatorik, asymptotische Näherung.

```
        Friedman rank sum test
data:  sales and brand and store
Friedman chi-squared = 8.3284, df = 4,
  p-value = 0.08026
```

i Sensorik Scores (1 bis 10) für das Aussehen von Feingebäck.
117 Testpersonen








```
Friedman rank sum test
data:  t.dr
Friedman chi-squared = 270, df = 11, p-value < 2.2e-16
```

j $g = 2 \longrightarrow$ 2 verbundene Stichproben $\longrightarrow$?

k kompliziertere Varianzanalysen

l* Rang-Regression:

Kleinste Quadrate ersetzen d. Funktion der Ränge der Residuen!

2.3 Rangkorrelation

a Rangkorrelation von Spearman:
$=$ Korrelation von rang-transformierten Daten
$\longrightarrow$ Test für Unabhängigkeit (also Korrelation 0)
$\longrightarrow$ Mass für die Abhängigkeit
$\approx$ gewöhnliche Korr. für normalverteilte Daten,
Invariant bei monotoner Transformation der Variablen.

Ebenso: Rangkorrelation von Kendall.

b* Rang-Methoden für multivariate Statistik:
Keine „natürliche Ordnung" $\longrightarrow$ Ränge im mehrdim. Raum.
$\longrightarrow$ Gegenstand der Forschung.

2.4 Anpassungstests

a Sind Daten mit der Annahme einer best. Verteilung verträglich?
QQ-Diagramme statt Test als „Beweis" für die Annahme!

b QQ-Diagramm: Empirische Quantile vs. theoretische Q.
Quantil $= F^{-1}\langle p_k\rangle$.
F aus Nullhypothese / aus Daten: $\widehat{F}_n\langle x\rangle = \#\{i \mid X_i \leq x\}/n$

Teststatistik $T = \max_x \langle |\widehat{F}_n\langle x\rangle - F\langle x\rangle| \rangle$.
Verteilung nicht von F abhängig (sofern F stetig):

$Y_i = g\langle X_i\rangle \Longrightarrow F^{(Y)}\langle y\rangle = F\langle g^{-1}\langle y\rangle\rangle$.
$\longrightarrow T$, berechnet für Y_i und $F^{(Y)} = T$ für X_i und F.
$g = F^{-1} \Longrightarrow F^{(Y)} =$ uniforme Vt. zwischen 0 und 1.
$\Longrightarrow$ Verteilung von T für $F =$ uniform gilt für alle F.

Kolmogorov (1933): asymptotische Näherung
mit sehr eleganten und grundlegenden Methoden.
$\longrightarrow$ Bedeutung für Wahrscheinlichkeitstheorie!

c Verteilungsform prüfen: $\mathcal{N}\langle \mu, \sigma\rangle$.
μ, σ aus den Daten schätzen $\longrightarrow$ andere Verteilung von T.

d **Chiquadrat-Test**. Siehe Abschnitt 10.2 in Stahel (200x).

e Chiquadrat-Test mit geeigneter Wahl der Klassen hat gegen wichtige Alternativen (langschwänzige Verteilung) grössere Macht als Kologorov-Test.

2.5 Ausblick

- Test gegen unterschiedliche Streuungen & allg. Alternativen
  für zwei unabhängige Stichproben,
  z.B. Vergleich zweier empirischer Verteilungsfunktionen
  (Kolmogorov-Smirnov-Test)
- Varianzanalyse:
  Tests gegen speziellere Alternativen (monotone Effekte),
  Methoden für Kontraste
- Methoden für Überlebenszeiten ($\longrightarrow$ Block Überlebensz.)

Literatur

Hollander & Wolfe (1999): Umfassend, zuerst rezeptartig, nachher vertieft.

Büning & Trenkler (1994): alt, aber deutsch

Hettmansperger (1984): Rang-Methoden