

Schliessende Statistik

7 Schätzungen

7.1 Drei Grundfragestellungen der Schliessenden Statistik

- a Aufgabe der Schliessenden oder Analytischen Statistik:
Brücke zwischen Modellen und konkreten Daten schlagen.

Beispiel Asbest.

b **Beispiel Schlafverlängerung.**

Unterschied X_i in der Schlafdauer bei Verwendung von

Schlafmittel A gegenüber Mittel B.

Modell: $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, unabhängig.

Beobachtungen: 1.2, 2.4, 1.3, 1.3, 0.0, 1.0, 1.8, 0.8, 4.6, 1.4.

Fragen:

- 1 Um wie viel wird der Schlaf verlängert? Wie gross ist μ ?
- 2 Ist es möglich, dass Mittel A nicht wirksamer ist als B?
Ist $\mu \leq 0$ mit den Beobachtungen vereinbar?
- 3 In welchen Grenzen liegen die Werte μ
die aufgrund der Daten noch plausibel erscheinen?

c Methoden:

- 1 **Schätzungen,**
- 2 **Tests,**
- 3 **Vertrauensintervalle.**

d Modell der **Zufalls-Stichprobe**:

Daten werden unter gleichbleibenden Verhältnissen und

unabhängig voneinander gewonnen.

Unabhängig und gleich verteilt

(independent and identically distributed, i.i.d.)

7.2 Schätzungen für ... Normalverteilung

- a Problem: Man hat Daten und ein Modell für sie in Form einer parametrischen Verteilungsfamilie, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (i.i.d.).
- Werte der **Parameter** festlegen, und zwar so, dass sie **möglichst gut zu den Daten passen**.

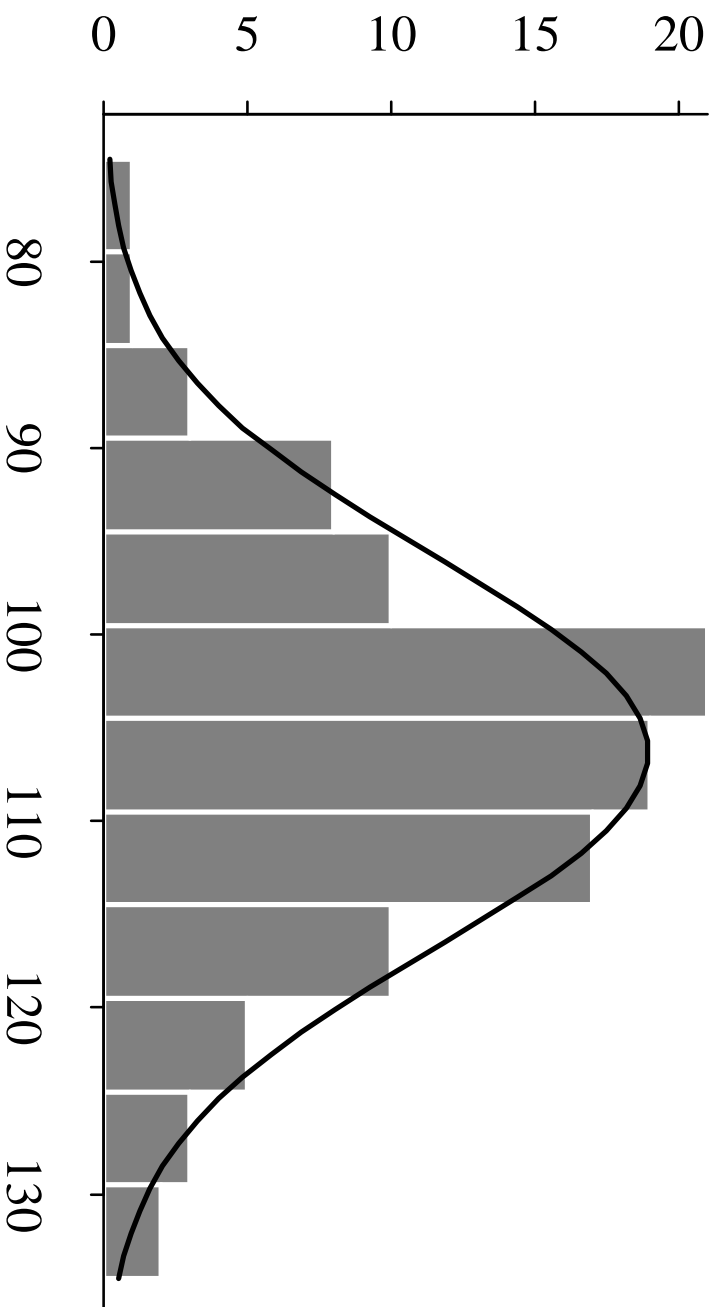
- d **Bsp. Schlafverlängerung.**

Erwartungswert μ schätzen durch das arithm. Mittel \bar{X}
 Varianz σ^2 schätzen durch die empir. Varianz $\hat{\text{var}} = S^2$.

$$\bar{X} = 1.58, \quad S^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 1.51 = 1.23^2.$$

Modell, das die Daten gut beschreibt: $\mathcal{N}(1.58, 1.23^2)$.

- e **Beispiel Küken** : $\bar{X} = 106.25$, $S^2 = 111.8 = 10.6^2$,
 $X_i \sim \mathcal{N}(106.25, 10.6^2)$.



- f Prinzip: Kennzahlen der Stichprobe mit Kennzahlen der Verteilung identifizieren!
→ Momenten-Methode.
- g μ ist (auch) Median der Normalverteilung.
Also durch den Median der Stichprobe schätzen.

n \bar{X} und $\widehat{\text{med}}$ sind **Schätzungen** für den Parameter μ der Normalverteilung. Schätzungen sind Funktionen, die den n Daten **eine** Zahl und damit den n Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n **eine** Zufallsvariable zuordnen.

Schätzungen sind selbst Zufallsvariable.

Bazeichnung: Grossbuchstaben: \bar{X} , T
oderHut über Parameter, $\widehat{\mu}$, $\widehat{\sigma}$, allgemein $\widehat{\theta}$.

7.3 Eigenschaften von Schätzungen

- a Eigenschaften v. Schätzungen m . Hilfe des W .modells studieren.
Dazu vergessen wir f. den Moment die konkreten Daten wieder.
Legen Modell für die Beobachtungen fest.

b $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$ (i.i.d.).

Schätzung \bar{X} oder $\widehat{\text{med}}$? Verteilungen studieren!

Verteilung von \bar{X} ?

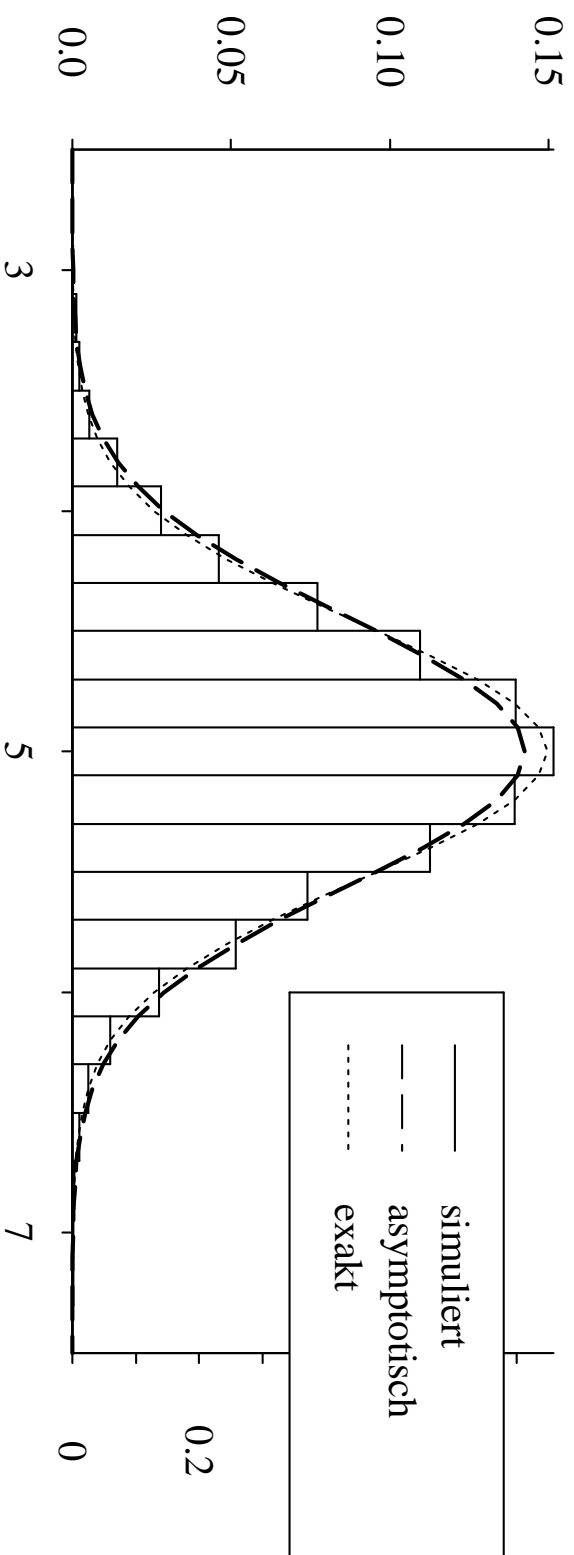
Verteilung von $\widehat{\text{med}}$?

z.B. Simulation. Übungen. Ergebnisse?

Empirischer Median $\widehat{\text{med}}$ von $n = 5$ $X_i \sim \mathcal{N}(5, 1)$.

simulierte Wahrscheinlichkeit

Dichte



- d Welche Schätzung soll man wählen?

Die Schätzung T soll möglichst nahe bei θ liegen!

Ein Mass für die Grösse der Abweichungen ist der
„mittlere quadratische Fehler“

$$\text{MSE} = \mathcal{E} \langle (T - \theta)^2 \rangle = \text{var} \langle T \rangle + (\mathcal{E} \langle T \rangle - \theta)^2$$

$b = \mathcal{E} \langle T \rangle - \theta$ misst Unterschied zw. dem Erwartungswert von T
und dem „Sollwert“ θ .

Systematischer Fehler oder **Bias** b der Schätzung.

Bias $b = 0$: „**erwartungstreu**“

b^2 und $\text{var} \langle T \rangle$ sollen klein sein!

Oder: Erwartungstreu ($b = 0$) und $\text{var} \langle T \rangle$ möglichst klein!

e $X_i \sim \mathcal{N}\langle 5, 1 \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\mathcal{E}\langle \bar{X} \rangle = \mathcal{E}\langle X_i \rangle = \mu = 5. \quad \mathcal{E}\langle \widehat{\text{med}} \rangle = \mu = 5.$$

$$\text{var}\langle \bar{X} \rangle = \frac{1}{n} \text{var}\langle X_i \rangle = \frac{1}{5}. \quad \text{var}\langle \widehat{\text{med}} \rangle? \text{ Simulation: } \approx 0.294.$$

Standardabweichungen („Standardfehler“) 0.447 resp. 0.542.

\bar{X} gewinnt! ... auch gegenüber allen anderen.

Für normalvert. Beob. ist \bar{X} die beste Schätzung von μ !

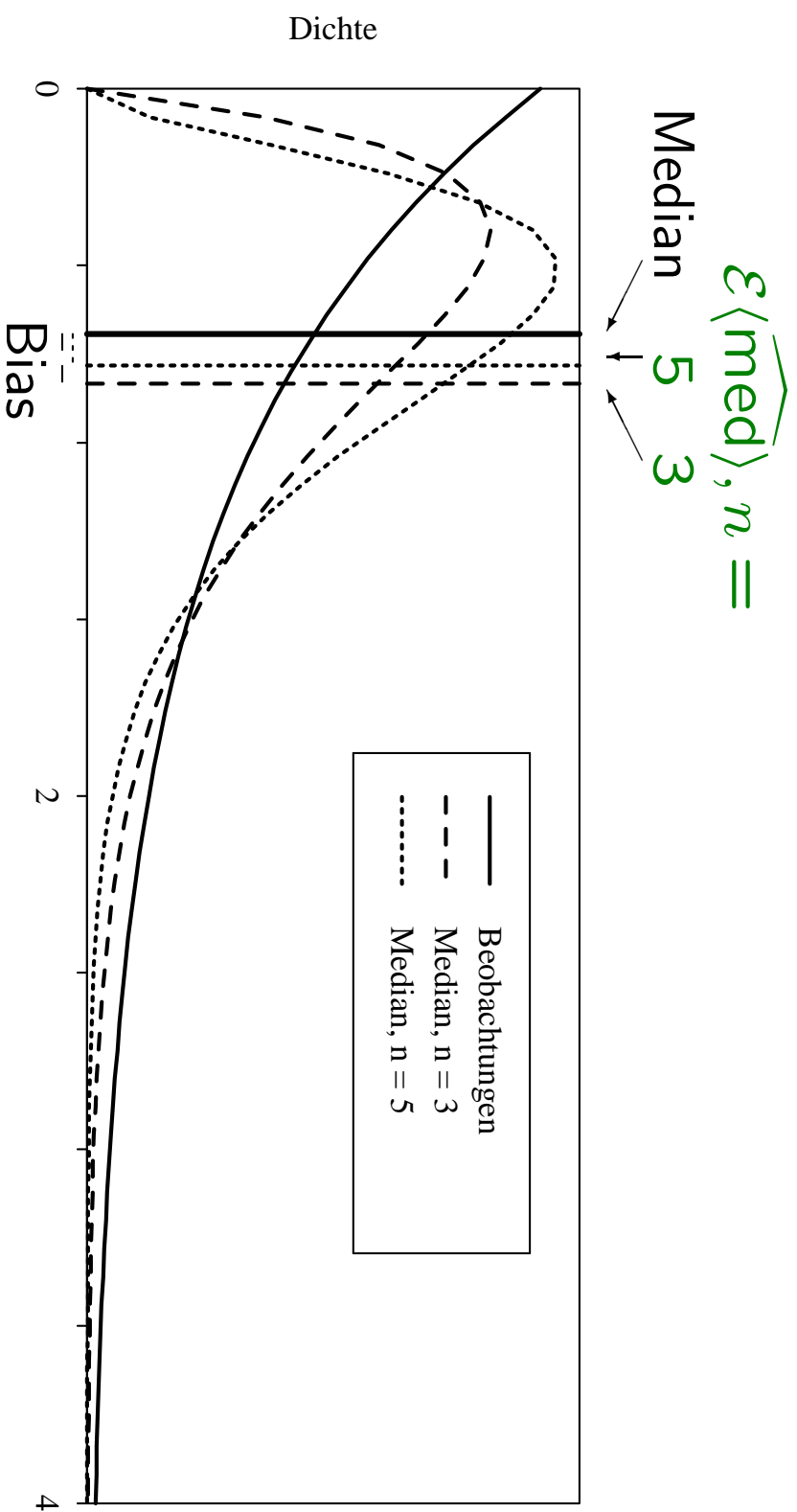
f Exponential-Vert. Schätzung der Halbwertszeit (Median)

$$\tau = \log_e\langle 2 \rangle / \lambda. \quad X_i \sim \text{Exp}\langle \lambda \rangle.$$

Empirischer Medians von $n = 3$ und $n = 5$ Beobachtungen.

$$\mathcal{E}\langle \widehat{\text{med}} \rangle \neq \tau! \quad b \neq 0.$$

b nimmt mit zunehmendem n ab. Die Verteilung wird schmaler.



- g $b = 0$: biasfrei oder **erwartungstreu** (englisch **unbiased**).
 Viele übliche Schätzungen sind erw.treu,
 wenn die Modell-Annahmen „stimmen“.

- j Varianz $\sigma^2 = \text{var}\langle X_i \rangle$ schätzen!

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$. Gute Schätzung?
 Erwartungstreu? Es sei $\mathcal{E}\langle X_i \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\left\langle \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right\rangle &= \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{E}\langle X_i^2 \rangle - n \mathcal{E}\langle \bar{X}^2 \rangle \\ &= n\sigma^2 - n \cdot \frac{1}{n} \sigma^2 = (n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

Deshalb der ominöse Faktor $1/(n-1)$ in S^2 .

- k Verteilung von S^2 hängt von der Verteilung der X_i ab!