Solutions to Exercise Sheet 10

1. The random variables $X_i, i = 1, 2, ..., 6$ follow Poisson distributions with identical parameters $\lambda_i = \lambda$, and they are independent. Thus $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ is Poisson distributed with parameter 6λ.

a) Using the rule of thumb given, the datum $X = 2 + 3 + 1 + 5 + 6 + 3 = 20$ yields the following 95% confidence interval for 6λ: $20 \pm 2\sqrt{20} = [11.06, 28.94]$; thus the 95% confidence interval for λ is $[c_1/6, c_2/6] = [1.84, 4.82]$.

b) Null hypothesis $H_0 : X_i$ i.i.d. $Poi(\lambda_0 = 6)$
Alternative $H_A : \lambda_0 < 6$ (decrease)
Test statistic: $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$; under H_0, $X \sim Poi(36)$
Critical value of the one-sided test at level 2.5%: $36 - 2\sqrt{36} = 24$.
Critical set $\mathcal{K} = \{X < 24\}$.
$X = 20 \in \mathcal{K}$. We conclude that the substance has decreased significantly in quantity.

Alternative solution:
As the one-sided 97.5% confidence interval is $[0\ ,\ 4.82]$, which does not contain 6, the null hypothesis $\lambda_0 = 6$ of the one-sided test at level 2.5% must be rejected.

2. Sei X die Anzahl kranker Tauben zwischen den $n = 50$ geschossener Tauben.

a) Jede Taube ist, unabhängig von den anderen, mit Wahrscheinlichkeit p krank.
Schätzung von $p : \widehat{p} = \frac{X}{50} = \frac{12}{50} = 0.24$.
Das Abschussexperiment lässt sich durch die Binomialverteilung beschreiben:
$X \sim \text{Bin}\,(n = 50, p)$.

b) In a) hatten wir $\widehat{p} = \frac{X}{n}$. Daraus folgt

$$\text{Var}\,(\widehat{p}) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\text{Var}\,(X)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

und somit

$$\sigma_{\widehat{p}} = \sqrt{\text{Var}\,(\widehat{p})} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Wir erhalten die empirische Standardabweichung von $\hat{p}$, wenn wir p durch $\widehat{p} = 0.24$ ersetzen: $\widehat{\sigma}_{\widehat{p}} = 0.06$.

c) Die Fragestellung führt zu folgendem Test:
$H_0 : X \sim \text{Bin}\,(50, p_0 = 0.4)$
$H_A : X \sim \text{Bin}\,(50, p)$, mit $p \neq p_0 = 0.4$
95%-Vertrauensintervall (mit Normalapproximation): $\widehat{p} \pm 1.96 \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{p}} = [0.122, 0.358]$.
Entscheidung: H_0 verwerfen, da $0.4 \notin [0.122, 0.358]$. Es ist also nicht sinnvoll, dem Gerücht zu glauben (auf dem 5%-Niveau).

d) Man kann daraus schliessen, das die exakten Grenzen des 99%-Vertrauensintervall für p sind: $[0.105, 0.425]$. Die Nullhypothese wird somit auf dem 1%-Niveau beibehalten.

3. **a)** Es handelt sich um unverbundene (ungepaarte) Stichproben; es existiert keine gemeinsame Beobachtungseinheit.
Bemerkung: Man könnte von den beiden Pflanzengruppen auch unterschiedlich viele nehmen (z.B. 10 geschnittene Pflanzen, 12 Pflanzen mit Wurzeln). Unterschiedliche Anzahlen in 2 Gruppen sind nur bei unverbundenen Stichproben möglich!

b) 2-Stichproben-t-Test
X_i: i-ter Wert der geschnittenen Pflanzen, $i = 1, \ldots, n = 10$
Y_j: j-ter Wert der Pflanzen mit Wurzeln, $j = 1, \ldots, m = 10$

Modellannahmen: $X_i \; iid \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_j \; iid \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, $X_i,\ Y_j$ unabhängig für alle i, j

Nullhypothese H_0: $\mu_1 = \mu_2$

Alternative H_A: $\mu_1 \neq \mu_2$

Teststatistik: $T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_{pool}\sqrt{1/n + 1/m}}$

$$S^2_{pool} = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y})^2\right)$$

Unter H_0 gilt: $T \sim t_{n+m-2}$, also hier $T \sim t_{18}$

Verwerfungsbereich: Tabelle: $t_{18,0.975} = 2.1$ (Test zweiseitig auf 5%-Niveau)
somit: $\mathcal{K} = \{|T| > t_{18,0.975}\} = \{|T| > 2.1\}$

Wert der Teststatistik: $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = 46.7$

$$\overline{Y} = \frac{1}{10}\sum_{j=1}^{10} Y_j = 36.5$$

$$\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 = 1116.9 \ (= 10 s_x^2)$$

$$\sum_{j=1}^{10}(Y_j - \overline{Y})^2 = 374.4 \ (= 10 s_y^2)$$

$$T = \frac{46.7 - 36.5}{\sqrt{\frac{2}{10}\frac{1}{18}(1116.9 + 374.4)}} = \frac{10.2}{4.0706} = 2.51$$

Entscheidung: da $T \in \mathcal{K}$, wird H_0 auf dem 5%-Signifikanzniveau durch den 2-Stichproben-t-Test verworfen.

c) Der P-Wert des Wilcoxon-Rangsummen-Test ist gleich 0.0039. Die Nullhypothese H_0 wird sogar auf dem 0.5%-Signifikanzniveau verworfen. Der P-Wert des 2-Stichproben-t-Tests beträgt 0.022. Auf dem 5%-Niveau wird man die Nullhypothese H_0 verwerfen, nicht aber auf dem 1%-Niveau. Der auffällige Wert 18 in

der ersten Stichprobe (siehe Normal QQ-Plot geschnittener Pflanzen) könnte ein Abschreibfehler oder ein grober Fehler sein. Diesem Wert sollte man unbedingt nachgehen (zurück in die Protokolle!). Wir entfernen diesen Wert probeweise und führen nochamls ein 2-Stichproben-t-Test mit $n = 9$ und $m = 10$ durch: wir erhalten den P-Wert = 0.00011. Jetzt wird H_0 auch auf dem 1%-Niveau deutlich verworfen.
Der t-Test reagiert sehr empfindlich auf einzelne Ausreisser. Weil die Annahme der Normalverteilung durch die zwei Normal QQ-Plots nicht deutlicherweise bestätigt werden kann, ist es besser hier den Wilcoxon-Test anzuwenden.

Quelle: Chatfield (1990), „Problem Solving: A Statistician's Guide“, Exercise B1 p. 93 Broad bean plants mit Kommentar p. 101)