Stichprobengrösse

Bsp: z-Test

$H_0: \mu = \mu_0 = 500 ml$; $H_A: \mu < 500 ml$; $\sigma = 7 ml$; $\alpha = 0{,}05$

Kleinste relevante Abweichung:

$d = |\mu_0 - \mu| = 5 ml$ (z.B. $\mu = 495 ml$)

Wunschzettel:

- Fehler 1. Art : 5%
- Macht von 90%, falls in Wahrheit $\mu = 495 ml$

$\Rightarrow$ Wie gross muss die Stichprobe sein?

Falls $\mu = \mu_0 = 500 ml$: $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(500, \sigma^2/n)$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - 500}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Fehler 1. Art ↑

Macht bei $\mu = 495 ml$ ↓

Falls $\mu = 495 ml$: $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(500-d, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\Rightarrow T_A = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - 500}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}\left(-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n}, 1\right)$$

$$E(T_A) = E\left(\frac{\bar{X}_n - 500}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} E(\bar{X}_n - 500) =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(E(\bar{X}_n) - 500\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \cdot \left((500-d) - 500\right) =$$

$$= -d\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\text{Macht} = P(T_A \leq -1{,}64) = P\Big(T_A - \overbrace{\left(-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\right)}^{E(T_A)} \leq -1{,}64 - \left(-\frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\right)\Big) =$$

$$= P\left(Z \leq -1{,}64 + \frac{d}{\sigma}\sqrt{n}\right) \overset{!}{=} 0{,}9$$

$$\Rightarrow -1{,}64 + \frac{d}{\sigma}\sqrt{n} = \underbrace{1{,}28}_{\text{Tabelle}} \Rightarrow n = \left(2{,}92 \cdot \frac{\sigma}{d}\right)^2$$

im Bsp: $\sigma = 7, d = 5 \Rightarrow \underline{\underline{n \approx 17}}$

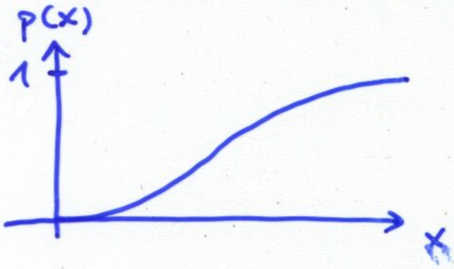
Zweistufige, stochastische Modelle

A) Wirkung von Gift

x: Giftdosis; n Tiere; p: Sterbewa.; Y: # gestorbener Tiere

1) $Y \sim Bin(n, p(x))$

2)



z.B.: $p(x) = \dfrac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$ „Logistische Regression"

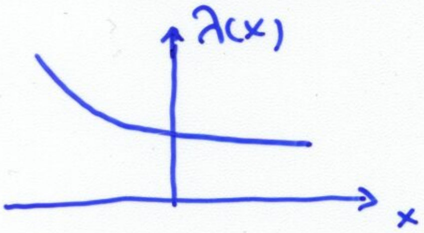
Mgl. Frage: Bei welcher Dosis ist $p = 0{,}5$ (LD50)?

B) Anzahl Autounfälle je nach Temperatur

Y: # Autounfälle pro Tag in ZH; x: Temperatur in °C

1) $Y \sim Pois(\lambda(x))$

2)



z.B.: $\lambda(x) = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$

„Poisson Regression"

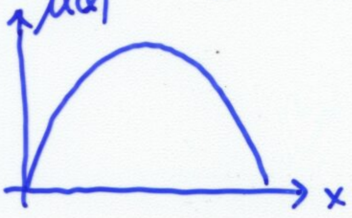
Mgl. Frage: Morgen wird es −5°C. Was ist das 95%-Quantil der Unfälle morgen?

C) Kraftzuwachs bei Anfängern in Abh. von Trainingsdauer

Y: Kraftzuwachs nach 6 Wochen; x: Trainingszeit pro Woche

1) $Y \sim \mathcal{N}(\mu(x); \sigma^2)$ „Lineare Regression"

2)



z.B.: $\mu(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

„linear" in Parametern: In $\dfrac{d\mu(x)}{d\beta_i}$ kommt kein β_i mehr vor

Mgl. Frage: Welche Trainingsdauer pro Woche bringt optimalen Kraftzuwachs?

usw.