t-Test für eine Stichprobe

Bsp: Getränke; neue Abfüllmaschine → gleiche Füllmenge?

10 Flaschen: 493, 497, 495, 502, 494, 496, 500, 501, 495, 498 [ml]

t-Test für eine Stichprobe

1) Modell: $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_x^2)$ iid; σ_x unbekannt

$n = 10$

2) $H_0: \mu = 500\,ml$; $H_A: \mu \neq 500\,ml$

3) Teststatistik: $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\bar{X}_n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_x / \sqrt{n}}$

Falls H_0 stimmt: $T \sim t_{10-1} = t_9$

4) Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

5) Verw. bereich der Teststatistik:

$K = (-\infty; -t_{n-1; 1-\alpha/2}] \cup [t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) =$

$= (-\infty; -t_{9; 0{,}975}] \cup [t_{9; 0{,}975}; \infty)$

Tabelle: $t_{9; 0{,}975} = 2{,}262$

$\Rightarrow K = (-\infty; -2{,}262] \cup [2{,}262; \infty)$

6) Testentscheid:

$\bar{x}_n = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i \approx 497{,}1$; $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 497{,}1)^2} \approx 3{,}07$

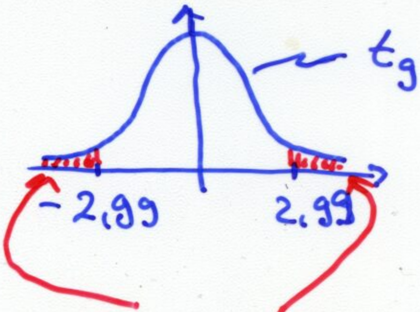
$\Rightarrow t = \frac{497{,}1 - 500}{3{,}07 / \sqrt{10}} \approx -2{,}99$; $t \in K$

$\Rightarrow H_0$ wird auf dem 5% Sign.niveau verworfen

Der Hersteller sollte seine Maschine neu einstellen.

- Alternative zu Verwerfungsbereich: p-Wert

1) – 4) wie gerade eben



5) p-Wert: $t = -2{,}99$

$$\text{p-Wert} = P(T \leq -2{,}99) + P(T \geq 2{,}99) =$$

$$= P(T \leq -2{,}99) + (1 - P(T \leq 2{,}99)) \approx$$

$$\approx 0{,}0076 + 0{,}0076 = 0{,}015$$

6) Testentscheid:

p-Wert $< 0{,}05$

$\Rightarrow$ H_0 wird auf dem 5% Sign.niveau verworfen

Der Hersteller sollte seine Maschine neu einstellen.

Alternative zum Hypothesentest: Vertrauensintervall ③

$$(1-\alpha)-VJ = \left[\bar{x}_n - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_n + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\Rightarrow 95\%-VJ = \left[\bar{x}_n - t_{n-1;1-\frac{0{,}05}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_n + t_{n-1;1-\frac{0{,}05}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}} \right] =$$

$$= \left[497{,}1 - 2{,}262 \cdot \frac{3{,}07}{\sqrt{10}} ; 497{,}1 + 2{,}262 \cdot \frac{3{,}07}{\sqrt{10}} \right] =$$

$$= \left[494{,}9 ; 499{,}3 \right]$$

Die Abfüllmenge der neuen Maschine liegt mit 95%-Wa im Bereich $[494{,}9 ; 499{,}3]$.

Merke: Vertrauensintervall $\neq$ Verwerfungsbereich

- Vertrauensintervall enthält plausible Parameterwerte
- Verwerfungsbereich enthält unplausible Werte der Teststatistik; ist Teil eines Hypothesentests

Vorzeichentest

Alternative zu t-Test, falls Daten nicht $\sim \mathcal{N}$

x_i : 493, 497, 495, 502, 494, 496, 500, 501, 495, 498

$x_i \geq 500$: − − − + − − + + − −

Augenommen, wahrer Median wäre 500 ml.

Dann wäre $P(„+") = P(x_i \geq 500) = 0{,}5$

$\Rightarrow$ 10 Lose, 3 Gewinne („+")

Ist es plausibel, dass Gewinnwa. $\pi = 0{,}5$,

wenn wir 3 Gewinne in 10 Losen sehen?

$\Rightarrow$ Binomialtest

Gepaarter t-Test

Sind optische und akustische Reaktionszeit gleich?

Person	1	2	3	4	5	6	7	
optisch (a_i)	179	191	214	189	248	198	200	← 2 Stichproben
akust. (b_i)	168	192	193	163	221	165	182	← gepaart
$x_i = a_i - b_i$	11	-1	21	26	27	33	18	← 1 Stichprobe

→ Hat Differenz Mittelwert 0?

- t-Test für eine Stichprobe

1) $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_x^2)$ iid; σ_x unbekannt; $n = 7$
2) $H_0: \mu = 0$; $H_A: \mu \neq 0$
3) Teststatistik: $T = \dfrac{\overline{X}_n - 0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}_n}} = \dfrac{\overline{X}_n - 0}{\hat{\sigma}_x / \sqrt{n}}$

   Falls H_0 stimmt: $T \sim t_{7-1} = t_6$
4) $\alpha = 0{,}05$
5) Verwerfungsbereich für Teststatistik:

   $K = (-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \approx$

   $\approx (-\infty; -2{,}447] \cup [2{,}447; \infty)$ weil $t_{6;0{,}975} = 2{,}447$
6) Testentscheid: $\overline{x}_n = 19{,}3$; $\hat{\sigma}_x = 11{,}4$; $n = 7$

   $\Rightarrow t = \dfrac{19{,}3 - 0}{11{,}4 / \sqrt{7}} \approx 4{,}48$

$t \in K \Rightarrow H_0$ wird auf 5% Sign.niveau verworfen

Die akustische Reaktion ist schneller.

95% - Vertrauensintervall:

$$VI = \left[\bar{x} - t_{6;0,975}\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{6;0,975}\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}\right] \approx$$

$$\approx [9 ; 30]$$

$\Rightarrow$ Die optische Reaktion ist mit 95% Wa. um 9 ms bis 30 ms langsamer als die akustische Reaktion.

Ungepaarter t-Test

Aktivität Gen 1

Gruppe Typ 1: $x_1 = 2{,}1$; $x_2 = 1{,}3$; $x_3 = 1{,}9$; $x_4 = 1{,}2$; $x_5 = 1{,}4$; $n = 5$

Gruppe Typ 2: $y_1 = 1{,}9$; $y_2 = 2{,}5$; $y_3 = 2{,}4$; $y_4 = 2{,}9$; $m = 4$

$\bar{x} = 1{,}58$; $\bar{y} = 2{,}43$; $\hat{\sigma}_x = 0{,}40$; $\hat{\sigma}_y = 0{,}41$

1) Modell: $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$ iid

$Y_1, \dots, Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma^2)$ iid

2) $H_0: \mu_x = \mu_y$; $H_A: \mu_x \neq \mu_y$ (oder einseitig)

3) Teststatistik:

$$T = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) - (\mu_x - \mu_y)}{\hat{\sigma}(\bar{X}_n - \bar{Y}_n)} = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n)}{\hat{\sigma}(\bar{X}_n - \bar{Y}_n)}$$

$$\hat{\sigma}(\bar{X}_n - \bar{Y}_n) = S_{pool}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}_x^2 + (m-1)\hat{\sigma}_y^2}{n+m-2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{(5-1)\cdot 0{,}40^2 + (4-1)\cdot 0{,}41^2}{5+4-2}} \approx 0{,}27$$

(Ergebnis stimmt immer noch ungefähr)

4) $\alpha = 0{,}05$ Falls H_0 stimmt: $T \sim t_{n+m-2}$

5) Verwerfungsbereich:

$$K = (-\infty; -t_{n+m-2;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n+m-2;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty) \approx$$

$$\approx (-\infty; -2{,}26] \cup [2{,}26; \infty) \quad \text{(oder einseitig)}$$

6) Testentscheid: $t = \dfrac{1{,}58 - 2{,}43}{0{,}27} \approx -3{,}15 \in K$

$\Rightarrow$ H_0 wird auf 5% Sign.niveau verworfen

Gen 1 ist bei Tumor Typ 1 schwächer aktiv.