Folien zum "Lookback" über den Dirichlet-Prozess

Marco Frei

7. April 2008

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
$(S, \mathcal{E})$ Borel-Raum ("Zustandsraum")

Ein stochastischer Prozess $(Y_i)_{i\in I}$ ist eine Familie von S-wertigen Zufallsvariablen indiziert durch eine Menge $I \neq \varnothing$:

$$Y : I \times \Omega \to S, \quad (i, \omega) \mapsto Y_i(\omega) := Y(i, \omega),$$

wobei Y_i $\mathcal{F} - \mathcal{E}-$messbar ist $\forall i$.

Y kann auch aufgefasst werden als Abbildung ("random function")

$$Y : \Omega \to S^I, \quad \omega \mapsto (i \mapsto Y_i(\omega)),$$

wobei S^I die Menge aller Funktionen $f : I \to S$ bezeichnet. Diese Abbildung ist messbar, wenn wir S^I mit der σ-Algebra $\mathcal{C}$ versehen, die erzeugt wird von Mengen der Form

$$\{f : f(i) \in E\}$$

mit $i \in I, E \in \mathcal{E}$.

Die Verteilung ("law") eines Prozesses ist das Mass $\mathbb{P}^Y$ auf $(S^I, \mathcal{C})$ gegeben durch

$$\mathbb{P}^Y[C] = \mathbb{P}[Y \in C], \quad C \in \mathcal{C}.$$

$\mathbb{P}^Y$ ist eindeutig bestimmt durch die endlichdimensionalen Randverteilungen (FDDs) des Prozesses, d.h. durch die gemeinsamen Verteilungen der Zufallsvektoren $(Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $i_j \in I$:

$$\mathbb{P}^Y_{i_1,\ldots,i_n}[E_1 \times \cdots \times E_n] = \mathbb{P}[Y_{i_j} \in E_j,\, j = 1, \ldots, n].$$

Theorem. Eine Famile von Randverteilungen P spezifiert einen Prozess genau dann, wenn die folgenden Konsistenzbedingungen erfüllt sind:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i_1, \ldots, i_n \in I$ und alle Permutationen π von $\{1, \ldots, n\}$ gilt

- $P_{i_1,\ldots,i_n}[E_1 \times \cdots \times E_n] = P_{i_{\pi(1)},\ldots,i_{\pi(n)}}[E_{\pi(1)} \times \cdots \times E_{\pi(n)}]$
- $P_{i_1,\ldots,i_n}[E_1 \times \cdots \times E_n] = P_{i_1,\ldots,i_{n+k}}[E_1 \times \cdots \times E_n \times S \times \cdots \times S]$

$(H, \mathcal{A})$ messbarer Raum ("Stichprobenraum")
α endliches Mass auf $(H, \mathcal{A})$

Der *Dirichletprozess* $\mathbf{P}$ ist ein stochastischer Prozess indiziert durch die Menge $I = \mathcal{A}$ mit Werten in $S = [0, 1]$ (versehen mit der Borel-σ-Algebra)

$$\mathbf{P} : \mathcal{A} \times \Omega \to [0, 1], \quad (A, \omega) \mapsto \mathbf{P}(A, \omega),$$

respektive aufgefasst als "random function"

$$\mathbf{P} : \Omega \to [0, 1]^{\mathcal{A}}, \quad \omega \mapsto \mathbf{P}(\omega)[\cdot] := \mathbf{P}(\omega, \cdot),$$

wobei folgendes gelten soll:

- $\mathbf{P}(\omega)[\cdot]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(H, \mathcal{A})$

- Die FDDs von $\mathbf{P}$ sind Dirichletverteilungen, genauer: Für jede messbare Partition $H = \biguplus_{j=1}^{n} A_j$ gilt

$$(\mathbf{P}[A_1], \ldots, \mathbf{P}[A_n]) \sim \mathcal{D}(\alpha(A_1), \ldots, \alpha(A_n)).$$

Notation: $\mathbf{P} \sim \mathcal{D}(\alpha)$.

Es sei $X : \Omega \to H$ eine $\mathcal{F}$-$\mathcal{A}$-messbare Abbildung ("Stichprobe") und $\mathbf{P}$ ein Dirichletprozess mit Verteilung $\mathcal{D}(\alpha)$. Wir nehmen an:

$$X \,|\, \mathbf{P} = P \text{ hat Verteilung } P.$$

Updaten ist dann einfach:

Theorem. Die bedingte Verteilung von $\mathbf{P} \mid X = x$ ist $\mathcal{D}(\alpha + \delta_x)$.